UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA

Faculdade de Ciências e Tecnologia

Secção Autónoma de Ciências Sociais Aplicadas

Ciências de Educação

A APRENDIZAGEM DE FUNÇÕES NUM AMBIENTE COMPUTACIONAL COM RECURSO A DIFERENTES REPRESENTAÇÕES

Dissertação apresentada para a obtenção do grau de Mestre em Ciências de Educação - Área Educação e Desenvolvimento, sob a orientação conjunta da Professora Doutora Teresa Ambrósio e do Dr. José Manuel Matos.

ANTÓNIO MANUEL DIAS DOMINGOS

Lisboa

1994

À Dulce e à Rita

RESUMO

Pretendeu-se caracterizar a forma como os alunos interpretam o conceito de função a partir das suas múltiplas representações utilizando ferramentas computacionais.

O estudo decorreu numa turma do 10º ano, no ano lectivo de 1993/94, e teve como objectivo investigar como os alunos, que aprendem sobre funções com meios computacionais, compreendem o conceito de função. Mais especificamente, pretende-se: a) caracterizar o conceito de função dos alunos quando estudam funções envolvendo as suas diferentes representações, b) caracterizar os processos utilizados pelos alunos na tradução entre diferentes representações e c) caracterizar os processos utilizados na resolução de equações e inequações a partir da correspondente representação gráfica.

A metodologia de investigação teve uma natureza qualitativa, visando a descrição e compreensão dos processos de raciocínio desenvolvidos pelos alunos.

Os resultados sugerem que uma abordagem escolhida desenvolve nos alunos a capacidade de distinguir a mesma função em diferentes representações e facilita a criação de imagens mentais que permitem utilizar as características das funções em campos para além daqueles em que foram aprendidas. A aprendizagem das funções evolui de uma forma progressiva, passando de uma concepção operacional para uma concepção estrutural. A resolução gráfica de equações e inequações aparece como uma alternativa válida à resolução algébrica. Este estudo mostra ainda que esta abordagem pedagógica é possível no nosso país. O computador e a calculadora gráfica revelaram serem auxiliares preciosos para esta metodologia.

Abstract

We tried to characterize the way students deal with the concept of function on its various representations using computational tools.

This study was made with a 10th form class during 1993/94 and its goal was to investigate how students, who learn about functions with computational tools, understand the concept of function. More specifically we want to characterize: a) the students' concept of function when they study functions using different representations, b) the processes used by the students in the translation among different representations, and c) the processes used in solving equations and inequalities starting with the corresponding representations.

The investigation methodology had a qualitative nature aiming at the description and understanding of the reasoning processes developed by the students.

The results suggest that the chosen approach develops students' capacity of distinguishing the same function among different representations and facilitates the creation of mental images that allow them to use the characteristics of functions in areas beyond those in which they have learned. Learning functions develops in a progressive way, from an operational concept to a structural on. The graphic solution of equations and inequalities appears as a correct alternative to the algebraic solution. This study also shows that this pedagogical approach is possible in our country. The computer and the graphic calculator appeared to be valuable aids to this methodology.

ÍNDICE DE MATÉRIAS

ÍNDICE DE FIGURAS

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

1 - Pertinência do estudo

O conceito de função é uma ideia importante e unificadora em Matemática. Este conceito, que tem por base a correspondência um a um entre os elementos de dois conjuntos, foi desenvolvido para expressar matematicamente a ideia de dependência ou lei natural e, rapidamente, se tornou fundamental em toda a Matemática.

As funções aparecem ao longo de todo o currículo: na Aritmética, como operações entre números, onde a um par ordenado corresponde um número bem determinado; na Geometria relacionando conjuntos de pontos com as suas imagens através de transformações geométricas; no Cálculo de Probabilidades, relacionando os acontecimentos com as respectivas probabilidades e em Álgebra como relações entre variáveis que representam números.

O papel curricular deste conceito pode ser interpretado a partir de três aspectos essenciais: (1) a natureza predominantemente algébrica ou mais funcional da abordagem, (2) a generalidade do conceito, (3) a sua aplicação a problemas e situações da vida real e de outras ciências (Ponte, 1990).

Em Portugal, as orientações seguidas no estudo das funções têm-se caracterizado por uma abordagem predominante algébrica e lógica, com uma ênfase na terminologia. Basta, para tal, observar a forma como são valorizadas as noções de injectividade e sobrejectividade bem como o destaque que é dado à composição de funções com um tratamento puramente algébrico.

Os resultados deste tipo de ensino mostram que os alunos têm grandes dificuldades ao trabalhar com determinados conceitos funcionais. Estes conceitos, ao serem abordados de uma forma estrutural, levam à criação de algumas imagens mentais que não são, muitas vezes, compatíveis com os aspectos operacionais que o conceito apresenta. Na minha experiência como professor, verifico, muitas vezes, que os alunos fazem o estudo de funções com base em procedimentos algébricos que, por deficiência de cálculos, acabam por resultar em representações gráficas que contradizem as suas próprias expectativas. Mesmo nestas situações eles continuam a aceitar como válidos os resultados encontrados algebricamente por entenderem que utilizaram uma abordagem matematicamente correcta. O recurso a aspectos gráficos parece ser encarado como uma falsa prova que não serve como justificação matemática.

Em contrapartida a este tipo de abordagem são várias as alternativas apresentadas a nível nacional e internacional. As propostas das *Normas para o Currículo e a Avaliação em Matemática Escolar* (NCTM, 1990) são no sentido de privilegiar os aspectos intuitivos e relacionais a partir das representações gráficas. Propõem nomeadamente que os alunos ao explorarem as funções devem:

— descrever, representar e analisar relações com tabelas, gráficos e regras;

— analisar relações funcionais para explicar como uma mudança numa quantidade implica uma mudança numa outra;

— elaborar modelos para fenómenos reais utilizando diversos tipos de funções;

— traduzir representações tabulares, simbólicas e gráficas de funções umas nas outras;

— compreender as operações com classes de funções, o seu comportamento e propriedades gerais;

— analisar os efeitos das mudanças de parâmetros nos gráficos de funções.

Pretende-se, portanto, que o estudo das funções leve ao estabelecimento de um fundamento conceptual forte mesmo antes da introdução da sua linguagem própria e da sua notação formal.

Parece, assim, ser de especial importância uma abordagem do estudo das funções que coloca a sua principal ênfase na interpretação de gráficos e tabelas que privilegiem a relação entre variáveis da vida corrente, da Geometria, da Física ou de outras disciplinas. O trabalho com expressões analíticas continua a ser importante. No entanto, para além de manejar correctamente longas e intrincadas expressões, é fundamental que os alunos compreendam o seu significado em relação a casos concretos. Assim, o estudo analítico das funções em vez de se bastar a si próprio deve, pelo contrário, surgir com base em actividades sistematicamente feitas a partir de representações múltiplas (numéricas, tabulares, algébricas, gráficas, etc.).

Com o implemento da reforma currícular, os novos programas apontam para profundas alterações metodológicas. A ênfase no estudo das funções é colocada na abordagem intuitiva de gráficos de funções envolvendo variáveis concretas da vida real ou de outras disciplinas. Assim, o estudo das funções é considerado fundamental para a interpretação das leis que regulam os mais variados fenómenos do mundo em que vivemos. Pretende-se que o estudo intuitivo dos gráficos, que envolvem variáveis concretas da vida real ou de outras disciplinas, sirva para introduzir experimentalmente os conhecimentos indispensáveis à compreensão dos conceitos funcionais. A par desta abordagem intuitiva dos gráficos pretende-se que sejam estudados alguns tipos de funções em particular, as afins, as quadráticas, os módulos, as exponenciais, as logarítmicas, etc., sendo o seu estudo baseado, essencialmente, na interpretação de representações algébricas, gráficas e tabulares. Neste contexto, o recurso a ferramentas computacionais assume especial importância pelo que, o computador, com recurso a programas de traçado de gráficos, e a calculadora gráfica vêm desempenhar um papel fundamental. Ao libertar o aluno da tarefa morosa, de ordem aritmética, que seria necessária para construir um gráfico, a ferramenta computacional vem permitir que este possa construir e explorar várias situações que envolvam a mesma função, podendo, assim, estar desperto para as relações que se podem estabelecer, por exemplo entre a representação algébrica e gráfica.

Este tipo de abordagem vem proporcionar a realização de um grande número de experiências que suscitam actividades de comparação e encorajam a generalização das propriedades de determinado tipo de funções.

Por outro lado, tem-se constatado que o ensino tradicional não tem fomentado este tipo de aprendizagens e que os alunos têm grandes dificuldades ao referir determinados conceitos funcionais.

2 - Objectivos e questões de investigação

Pretende-se com este estudo contribuir para a compreensão de como os alunos do 10º ano interpretam alguns conceitos funcionais quando estes são ensinados no contexto dos novos programas curriculares dando uma ênfase particular a aspectos qualitativos e com recurso a ferramentas computacionais.

Neste trabalho a ênfase será colocada em aspectos relacionados com a aprendizagem. Assim, os objectivos centram-se na caracterização da forma como os conceitos funcionais são aprendidos com o auxílio de ferramentas computacionais. Não se pretenderá pois avaliar a implementação dos novos programas.

Este estudo tem como objectivo geral investigar como os alunos, que aprendem sobre funções com o auxílio de meios computacionais, compreendem o conceito de função.

Mais especificamente, pretende-se:

a) caracterizar o conceito de função dos alunos quando estudam funções envolvendo as suas diferentes representações;

b) caracterizar os processos utilizados pelos alunos na tradução entre as diferentes representações;

c) caracterizar os processos que os alunos utilizam na resolução de equações e inequações a partir da correspondente representação gráfica.

3 - Discussão de alguns conceitos fundamentais

3.1 - Representação

Uma definição de representação pode ser encontrada em Davis (1982, referido por Janvier, 1983). Assim, uma representação pode ser uma combinação de algo escrito num papel, algo que existe na forma de objecto físico e um arranjo da ideia cuidadosamente construído na nossa mente. Neste sentido, Janvier (1983) considera que é importante fazer a distinção entre representação e simbolismo ou ilustração. Assim, para Janvier (1983) uma representação pode ser considerada com a combinação de três componentes: símbolos (escritos), objectos reais e imagens mentais.

Na tentativa de tornar o termo representação mais preciso aparece na literatura sobre o tema uma classificação que distingue entre *representações externas* e *representações internas*. Segundo Girardon, Janvier e Morand (1993), as representações externas actuam como estímulos nos sentidos e incluem mapas, tabelas, gráficos, modelos, gráficos em computador e sistemas de símbolos formais. Elas são, muitas vezes, vistas como agregados de ideias ou conceitos. Bertin (citado por Girardon, Janvier e Morand, 1993) criou uma classificação das representações externas definida em três categorias que, embora ligadas à Geografia, apresentam alguma relação com a Matemática. A primeira categoria, mapas, inclui as representações que mantêm um certo grau de semelhança com as propriedades espaciais dos objectos que representam. A segunda categoria, diagramas, refere-se à naturaza das relações entre duas ou mais variáveis, onde se podem incluir, gráficos cartesianos, histogramas e gráficos de barras. A ideia base é reconhecer na representação duas ou mais curvas ou então eixos que relacionam duas variáveis. A terceira categoria está relacionada com redes onde as representações ilustram as relações entre acontecimentos, factores ou indivíduos. Segundo Girardon, Janvier e Morand, (1993) o critério que está subjacente a esta classificação reside no estudo das propriedades pictoriais das representações.

As representações internas têm a ver com as imagens mentais que correspondem às formulações internas construídas pelo indivíduo sobre uma dada realidade. Segundo Girardon, Janvier e Morand (1993) elas são mais ilusivas, porque não podem ser directamente observadas. Por vezes, são encaradas como modelos mentais ou cognitivos referindo-se a esquemas, conceitos, concepções ou objectos mentais. A presença destas representações na mente deve ser inferida a partir da observação dos alunos a trabalhar.

Ao longo do estudo são referidos os dois tipos de representações. As representações externas são referidas quando se indicam as diferentes representações de função: algébrica, gráfica, tabular e pontual. No caso da representação gráfica são considerados dois tipos de situações: quando os gráficos são dados no papel ou quando são apresentados no ecrã do computador. No primeiro caso optou-se por falar de *representação gráfica* enquanto que no segundo se utilizou a designação de *gráfico* ou *gráfico no ecrã do computador.*

As representações internas são evidenciadas quando se pretende referir os gráficos que os alunos invocam através da sua representação mental. Neste caso, optou-se pela utilização do termo *representação visual.*

3.2 - Tradução entre representações

A tradução entre representações está relacionada com uma tarefa que é típica no domínio das funções e dos gráficos. Segundo Leinhardt, Zaslavsky e Stein (1990) considera-se que tradução é: a) o acto de reconhecer a mesma função em diferentes formas de representação; b) a identificação duma representação de uma transformação específica de uma função, na sua correspondente representação, noutra transformação; ou construir uma representação duma função dada uma outra. Para Leinhardt, Zaslavsky e Stein (1990) as tarefas de tradução são fundamentais para o conceito de função que apresenta aspectos gráficos e não gráficos poderosos.

Burkhard (citado por Girardon, Janvier e Morand, 1993) descreve a diversidade das práticas de tradução com base no quadro seguinte:

De Para	**Situações, Descrição verbal**	**Tabelas**	**Gráficos**	**Fórmulas**
Situações, Descrição verbal	---------------	Medições	Esboço	Modelação
Tabelas	Leitura	------------	Traçado por pontos	Ajustamento
Gráficos	Interpretação	Leitura de valores	-------------	Ajustamento de curva
Fórmulas	Reconhecimento de parâmetros	Cálculos	Esboço	-------------

Figura 1.1 - Processos de tradução entre representações.
(Janvier, Girardon e Morand, 1993, p. 92).

Cada representação (ou modo de representação) é apresentado na primeira linha e na primeira coluna. Cada célula refere-se a uma tradução particular que relaciona as representações do início da linha com as do topo da coluna.

Ao longo do estudo são referidas algumas das traduções referidas acima. São, assim, consideradas a tradução da representação algébrica para a gráfica, da representação gráfica para a algébrica e da representação pontual para a algébrica. Em particular, consideram-se como situações da tradução do último tipo referido, aquelas onde se pretende definir uma expressão algébrica a partir do conhecimento de alguns pontos particulares, como por exemplo os situados sobre os eixos coordenados.

CAPÍTULO II

REVISÃO DE LITERATURA

1 - Conceito de função

O conceito de função é um conceito central nas matemáticas modernas. Historicamente podemos considerar que o seu início aparece com o desenvolvimento do simbolismo algébrico e a sua evolução tende a passar de uma perspectiva processual ou operacional, onde as funções são interpretadas com base em procedimentos computacionais, para uma perspectiva estrutural, onde as funções podem ser interpretadas como agregados de pares ordenados. A definição comummente utilizada acompanha esta evolução e assume, hoje em dia, uma forma mais estrutural. A utilização desta definição, vista como uma relação entre dois conjuntos, apresenta vantagens e desvantagens que poderão ser consideradas conforme o tipo de ensino que se pretende implementar. O conceito apresenta alguns traços importantes como a arbitrariedade e a univalência. A arbitrariedade baseia-se, essencialmente, na abordagem analítica e refere-se à relação entre os conjuntos onde a função está definida e aos próprios conjuntos, enquanto que a univalência é uma característica específica da função e refere-se à correspondência que se estabelece entre os elementos dos conjuntos. A compreensão destes traços parece ser de especial importância sobretudo quando se ensina o conceito, quer para evitar discrepâncias na sua compreensão por parte dos alunos, quer para dar significado ao conhecimento dos alunos a partir de exemplos elucidativos.

1.1 - Evolução da definição do conceito

Podemos considerar a evolução do simbolismo algébrico como determinante para o desenvolvimento do conceito de função. Segundo Kieran (1992) a evolução histórica do simbolismo algébrico permitiu uma mudança de uma perspectiva processual para uma perspectiva estrutural. Assim, podem ser considerados três estados de desenvolvimento: um estado retórico onde a linguagem ordinária era utilizada para resolver tipos particulares de problemas sem ser utilizado qualquer tipo de símbolos para representar quantidades desconhecidas; um estado considerado da Álgebra sincopada onde é introduzido o uso de letras para representar quantidades desconhecidas e um terceiro estado designado por Álgebra simbólica onde é possível exprimir soluções gerais e utilizar a Álgebra como ferramenta para provar regras que determinam relações numéricas. Kleiner (citado por Kieran (1992), considera que a criação da Álgebra simbólica foi um acontecimento essencial para o desenvolvimento do conceito de função sendo este elaborado por Euler como envolvendo as noções de variável independente e dependente. Este conceito de função é meramente processual considerando Euler a existência de "uma expressão analítica composta de alguma maneira de uma quantidade variável e de números ou quantidades constantes" (Selden e Seldem, 1992, p. 5). Este conceito de função é modificado por Dirichlet que vê as funções como correspondências arbitrárias entre números reais. Mais tarde é Bourbaki que, influenciado pelo avanço da Álgebra Abstracta, estabelece uma concepção mais estrutural da definição de função que passa a ser interpretada como uma relação entre dois conjuntos, ou seja, uma função é um subconjunto do produto cartesiano de dois conjuntos. Esta "moderna" definição é mais abstracta que as anteriores e a relação entre as variáveis, que era reforçada nas anteriores definições, aparece por vezes, disfarçada na nova, embora este aspecto faça parte integrante das novas definições.

A utilização desta nova definição pode ter vantagens e desvantagens. Segundo Markovits, Eylon e Bruckeimer (1986) as principais vantagens e desvantagens são:

— nas ciências como as Matemáticas Aplicadas, as funções são concebidas como relações entre variáveis, enquanto que a definição em termos de conjuntos não é usada. Contudo não há razões para deixar de ensinar as definições precisas como no contexto das matemáticas só porque elas não são usadas noutros campos. Além do mais é aceite que um profundo conhecimento do conceito de função é necessário para construir outros conceitos matemáticos em cursos posteriores;

— o desenvolvimento histórico da definição de função e o desenvolvimento dos alunos parecem ser um argumento contra o ensino da nova definição. Parece ser melhor para os alunos seguir o desenvolvimento histórico e encontrar o conceito de função primeiro como uma relação entre variáveis e só depois aprender a nova definição;

— a nova definição não é necessária senão aquando do estudo da análise e da topologia. Como apenas uma pequena percentagem dos alunos estudam este tópico pode-se ensinar uma definição mais fácil no início do estudo;

— a antiga definição refere-se somente a funções numéricas enquanto a nova inclui funções não numéricas e transformações. Mas como muitas das funções abordadas no ensino secundário e mesmo no superior são funções numéricas então talvez a nova definição não seja necessária nestes níveis.

Esta nova definição é dominante na concepção dos actuais currículos e aparece nos vários livros de texto, como por exemplo Ferreira (1990) "Intuitivamente pode interpretar-se uma função f, definida em certo conjunto D e com valores num conjunto E, como uma regra que faz corresponder a cada elemento x de D um único elemento $f(x)$ de E. O conjunto D é chamado domínio de f e o subconjunto C de E formado por todos os elementos $f(x)$, com $x \in D$, é o contradomínio de f" (p. 231), ou Neves e Brito (1993) "Dá-se o nome de função ou aplicação f a uma correspondência entre um conjunto A e um conjunto B se a cada elemento x do primeiro conjunto corresponde um e um só elemento $f(x)$ do segundo conjunto" (p. 84).

1.2 - Um modelo explicativo do conceito

Um modelo simples do processo cognitivo pode ser construído usando as noções de *conceito imagem* e *conceito definição* (Vinner, 1983, 1992; Vinner e Tall, 1981). Segundo Vinner, (1992) o *conceito imagem* é uma entidade não verbal associado na nossa mente com o nome do conceito. Ele pode ser uma representação visual do conceito, no caso deste ter representações visuais, ou uma colecção de impressões e experiências. As representações visuais, as imagens mentais, as impressões e as experiências associadas com o nome do conceito podem ser traduzidas em formas verbais. Mas é importante lembrar que estas formas verbais não são a primeira coisa a ser invocada na nossa memória quando ouvimos ou vemos o nome do conceito. As formas verbais podem começar somente num estádio posterior. Quando ouvimos a palavra função podemos lembrar-nos da expressão $y=f(x)$, ou podemos visualizar o gráfico da função, ou podemos pensar em funções específicas como $y=sin(x)$ ou $y=ln(x)$, etc. O conceito imagem é assim desenhado pela experiência comum, exemplos típicos, protótipos, etc.

O *conceito definição* tem a ver com uma definição verbal que explica exactamente o conceito de uma forma não circular (Vinner, 1983). Nós podemos olhar o conceito definição como sendo a forma das palavras usadas para especificar esse conceito. A definição pode ser aprendida por um indivíduo sob forma de rotina ou pode, por vezes, ser uma reconstrução pessoal. Ela é então a forma de palavras que os alunos usam para as explicações do seu conceito imagem.

1.3 - Traços essenciais do conceito de função

Segundo Freudental (1983) a *arbitrariedade* e a *univalência* são os traços essenciais do conceito de função dada a forma como ele está envolvido na história. A arbitrariedade está relacionada com um julgamento analítico enquanto a univalência é uma característica específica da função.

A natureza arbitrária das funções refere-se à relação entre dois conjuntos onde a função está definida e aos próprios conjuntos (Even, 1990). No que se refere à relação entre os dois conjuntos supõe-se que as funções não têm que ser descritas por nenhuma expressão específica, obedecer a determinadas regularidades ou ser representadas por um gráfico com determinados traços particulares. Quanto à natureza arbitrária dos conjuntos significa que as funções não têm que ser definidas num conjunto específico de objectos, nem os conjuntos têm que ser conjuntos de números. Podemos considerar a rotação de um plano como um exemplo deste tipo de funções, desde que ela seja definida a partir de pontos. Historicamente, no século *XVIII*, os matemáticos já estavam empenhados com a noção de arbitrariedade mas é só no século *XIX*, com o trabalho de Dirichlet, ao definir a sua bem conhecida função:

$$\begin{cases} 1, \text{ se } x \text{ é racional} \\ 0, \text{ se } x \text{ é irracional} \end{cases}$$

que as funções arbitrárias começam a ser consideradas funções e assim o conceito alarga o seu significado. Mais tarde, em conjunto com a arbitrariedade das relações entre variáveis, as próprias variáveis ou os conjuntos nos quais a função está definida passaram a ser considerados conjuntos arbitrários.

No trabalho realizado com futuros professores israelitas, Even (1993), identificou três tipos de concepções relacionadas com a arbitrariedade das funções: (1) funções são (ou podem por vezes ser representadas como) equações ou fórmulas, (2) gráficos de funções devem ser "bonitos" e (3) funções são "conhecidas". No caso em que as funções são identificadas com equações ou fórmulas, alguns dos participantes referem o facto de haver uma correspondência um a um entre as variáveis e utilizam o termo equação quando pretendem descrever uma função que é representada por uma fórmula. O facto de os gráficos terem de ser "bonitos" e regulares também é considerado por vários dos intervenientes no estudo. Quando se pede para decidir se a representação

$$\begin{cases} x, \text{ se } x \text{ é racional} \\ 0, \text{ se } x \text{ é irracional} \end{cases}$$

é uma função, um interveniente considera que sim utilizando como justificação o facto de haver uma correspondência um a um de cada valor para cada número. No entanto, quando pretende traçar o gráfico da função ele considera que o gráfico não é razoável e, portanto, duvida que a representação dada seja uma função. Outro tipo de "beleza" que os gráficos devem ter é relacionada com a noção de continuidade e os gráficos não devem ter cantos acentuados ou pontos pronunciados. No caso em que as funções são consideradas "conhecidas" os intervenientes consideram, por exemplo, que há uma infinidade de funções que passam por dois pontos, mas acabam por concluir que essas funções são parábolas ou outro tipo de linhas que eles identificam explicitamente como forma de justificação. Assim, eles não usam como justificação a característica da arbitrariedade das funções. Segundo Even, aqueles que consideram que por dois ou três pontos pode passar uma infinidade de funções têm uma melhor compreensão acerca da natureza arbitrária das funções do que os outros que o não consideram. Even conclui que muitos dos futuros professores têm uma concepção com expectativas específicas acerca das funções e do seu comportamento, concepções estas que são similares às dos alunos conforme alguma literatura descreve (Markovits et al., 1986; Vinner, 1983; Vinner e Dreyfus, 1989). Esta situação parece verificar-se uma vez que as funções que os alunos encontram ao logo dos currículos, e até mesmo no ensino superior, podem ser sempre descritas por fórmulas, representadas por gráficos que apresentam certas regularidades. É com base nestas funções que os alunos constroem o seu conceito imagem em detrimento da moderna definição que enfatiza a arbitrariedade das funções. Para Even, (1990) esta situação é aceitável no caso dos alunos mas não o é no caso dos professores, pois uma concepção incompleta das funções pode contribuir para criar discrepâncias entre o conceito definição e o conceito imagem dos alunos.

Enquanto a natureza arbitrária das funções está implícita na definição de função a univalência permanece explícita (Even, 1990). A univalência refere-se à correspondência que se estabelece entre os elementos dos dois conjuntos, ou seja, para cada elemento do domínio há apenas um único no contradomínio que lhe corresponde. Esta exigência faz parte dos vários currículos que lidam com funções e aparece relacionada com a definição. A distinção entre relações que são ou não funções é, muitas vezes, feita com base na univalência. Esta exigência faz parte do moderno conceito de função e tem uma importância muito grande na sua compreensão. Mas, para Even (1990), saber que as funções têm que satisfazer esta exigência não é suficiente, sobretudo quando se trata de futuros professores. É também necessário saber porque é que as funções são definidas desta forma.

Historicamente a univalência não era exigida no início do estudo das funções. Segundo Freudental (1983), a necessidade da univalência é devida ao desejo dos matemáticos manterem as coisas manejáveis. No estudo realizado com futuros professores, Even (1993) verificou que a univalência era utilizada, pela maioria dos participantes, quando se tratava da definição de função. No entanto, quando se pretendia saber por que é que eles utilizavam a noção de univalência, alguns consideraram que era para poder distinguir entre as relações que eram funções e as que não eram, outros não sabiam justificar porquê. Apenas um participante utilizou como explicação o facto de ser para manter as coisas manejáveis. Assim, não saber por que é necessária a univalência pode influenciar a escolha de abordagens pedagógicas específicas sendo os alunos confrontados com exemplos fáceis que enfatizam um conhecimento processual sem interesse pelo significado.

2 - Diferentes abordagens de ensino do conceito de função

De entre as diversas abordagens do conceito de função apresentam-se duas que parecem ser de especial importância. A primeira abordagem é desenvolvida por Vinner (1983) e tem por base o modelo do processo cognitivo a partir das noções de conceito definição e conceito imagem. Assume-se que as representações visuais são a primeira coisa a ser invocada na nossa mente quando falamos de um dado conceito e as formas verbais podem aparecer só num estado posterior. A segunda abordagem é desenvolvida por Sfard (1989, 1992) e refere-se a uma abordagem que privilegia a interpretação dos conceitos em termos operacionais como forma de passar para uma concepção mais global e mais estruturada. Esta abordagem sugere que as funções devem começar por ser estudadas a partir de uma abordagem operacional e só recorrer à abordagem estrutural quando for necessário passar a um nível superior na teoria. Apresenta-se, de seguida, a caracterização das abordagens acima referidas com referência a resultados de investigações conduzidas pelos mesmos autores.

2.1 - Conceito definição e conceito imagem

Na sequência da distinção, já referida anteriomente, entre conceito definição e conceito imagem, Vinner (1992) considera que a forma como o conceito é abordado nos vários currículos pressupõe que, no processo da sua formação, a definição pode assumir e modelar o conceito imagem, pelo que a forma como ela é ensinada é através do conceito definição. Contudo, muitas vezes, o conceito imagem é inteiramente modelado por alguns exemplos e não se adapta ao conceito definição. Assim, dada a natureza do pensamento espontâneo, muitos alunos nem sempre consultam o seu conceito definição e dão respostas apenas com base no seu conceito imagem. Outro fenómeno que pode causar algumas dificuldades na compreensão do conceito é designado por Vinner (1992) como o fenómeno da compartimentalização que consiste no facto de dois itens de conhecimento, que são incompatíveis, poderem coexistir na mesma mente sem que a pessoa esteja desperta para tal. No caso das funções, um aluno pode definir uma função como uma correspondência entre os elementos de dois conjuntos e, no entanto, pode considerar que um dado gráfico, por não ser regular, por exemplo uma correspondência arbitrária de x para y, não tenha nenhuma função que o descreva.

Para manipular os conceitos precisamos de um conceito imagem e não de um conceito definição. O conceito definição (quando introduzido pelos significados da definição) poderá permanecer inactivo e, muitas vezes, pode ser esquecido (Vinner, 1983). Assim, o processo de pensamento é guiado pelo conceito imagem e não pelo conceito definição.

Vinner (1983) a partir da administração de um questionário aos alunos do 10º e 11º graus tentou identificar quais eram os seus principais conceitos definição e imagem. No caso do conceito definição foram identificadas quatro categorias: 1) a definição do livro é, muitas vezes, misturada com elementos de célula do conceito imagem, sendo a definição do livro evocada pelas próprias palavras dos alunos de forma incorrecta; 2) a função é uma regra de correspondência, sendo eliminada a possibilidade de considerar correspondências arbitrárias; 3) a função é um termo algébrico, uma fórmula, uma equação, uma manipulação aritmética, etc., parecendo haver uma interacção entre as células do conceito definição e imagem, com este último a permanecer dominante; e 4) alguns elementos da imagem mental são tomados como a definição para os conceitos, as funções são identificadas com gráficos, símbolos como "$y=f(x)$" ou diagramas de setas. A par destas categorias foram identificadas outras seis que diziam respeito aos principais conceitos imagem dos alunos. Na primeira, uma função deve ser dada por uma regra, no caso de haver duas ou mais regras para domínios disjuntos então estaremos perante várias funções. No caso em que a correspondência era arbitrária os alunos chegam a falar de uma infinidade de funções. Na segunda categoria uma função pode ser dada por várias regras relacionadas com domínios diferentes, no entanto uma correspondência onde entra uma regra com uma excepção não parece ser considerada como função. A terceira categoria considera que as funções (que não são algébricas) existem somente se os matemáticos as reconhecem como tal dando-lhe um nome ou denotando-as com símbolos específicos. Na quarta categoria considera-se que um gráfico de uma função deve ser "razoável", considerando os alunos que o gráfico da função deve ser simétrico, contínuo, por vezes crescente ou decrescente, etc. A quinta categoria refere-se à relação entre as variáveis independente e dependente considerando que para cada y do contradomínio existe somente um x no domínio que lhe corresponde. Este ponto de vista parece estar relacionado com o facto de os alunos não se lembrarem da definição do livro de texto. Na última categoria, uma função é considerada como uma correspondência um a um. Este ponto de vista é o resultado da distorção da definição do livro. Esta distorção pode ser o resultado do que poderemos chamar de uma necessidade implícita para a simetria. Se a cada x do domínio corresponde somente um y no contradomínio então o contrário deverá também ser verdade.

Vinner e Dreyfus (1989) na tentativa de caracterizar as imagens e definições do conceito de função em alunos do primeiro ano do ensino superior (collegue) e de professores dos anos de escolaridade 5-8 (junior high school) não especializados em Matemática, utilizaram um questionário anónimo, cujas respostas foram, posteriomente, analisadas tendo sido identificadas várias categorias. Assim, no que se refere à definição do conceito, foram identificadas seis categorias: 1) *correspondência*, onde uma função é uma correspondência entre dois conjuntos que designa para cada elemento do primeiro conjunto exactamente um elemento no segundo; 2) *relação de dependência*, onde uma função é considerada uma relação de dependência entre duas variáveis (y depende de x); 3) *regra*, uma função é uma regra e é esperado que ela tenha uma certa regularidade, atendendo a que a correspondência pode ser "arbitrária"; 4) *operação*, onde uma função é uma operação ou uma manipulação de números através de operações algébricas por forma a obter as suas imagens; 5) *fórmula*, uma função é interpretada como uma fórmula, uma expressão algébrica ou uma equação; e 6) *representação*, sendo a função identificada com uma das suas representações gráficas ou simbólicas (por exemplo $y=f(x)$).

No que se refere ao conceito imagem foram considerados os aspectos específicos do conceito de função que tem um papel crucial nas explicações dadas pelos inquiridos sendo organizados nas seguintes categorias: 1) *univocidade* (one-valuedness), onde a correspondência só é considerada função se representa exactamente um valor para cada elemento no seu domínio, caso contrário não é função; 2) *descontinuidade*, refere-se ao facto de o gráfico ter uma lacuna sendo considerado que a correspondência é descontínua num ponto do seu domínio; 3) *divisão do domínio*, sendo admitido que se o domínio da correspondência se divide em dois sub-domínios, com uma regra diferente em cada um deles, então o gráfico pode mudar as suas características de um sub-domínio para o outro e 4) *ponto excepcional*, que é considerado como um ponto onde a regra geral de correspondência não funciona.

2.2 - A transição de uma concepção operacional para uma concepção estrutural do conceito de função

Segundo Sfard (1989) a maioria das noções matemáticas podem ser concebidas de duas formas diferentes: como construtos estáticos (concepção estrutural) ou como processos (concepção operacional). Assim, as funções podem ser interpretadas estruturalmente, como agregados de pares ordenados, ou operacionalmente, utilizando procedimentos computacionais. Aparentemente estas duas abordagens parecem incompatíveis, pois é difícil entender algo como um processo e como um objecto ao mesmo tempo. No entanto, Sfard salienta que elas são complementares. Assim, a capacidade de ver uma função ou um número, quer como um processo, quer como um objecto, parece ser indispensável para resolver problemas matemáticos mais avançados. Segundo Sfard, no processo de formação dos conceitos, a concepção operacional é, muitas vezes, a primeira a ser desenvolvida. A abordagem estrutural pode evoluir gradualmente para além desta. Sfard (1987) defende que a passagem da abordagem operacional para a estrutural está relacionada com a forma como se tem processado o desenvolvimento histórico bem como a aprendizagem individual. No entanto, certas partes da Matemática podem ser interpretadas como uma espécie de hierarquia, onde aquilo que é concebido de uma forma puramente operacional, num dado nível, pode ser concebido estruturalmente num nível superior. Os processos são assim convertidos num todo compacto que permanece como uma unidade básica para um nível mais alto da teoria que Sfard (1989) designa por *concretização* (reified), ou seja, a conversão dum processo num objecto abstracto.

Esta forma de abordar os conceitos sugere a observação de dois princípios didácticos importantes (Sfard, 1989, 1992) que, infelizmente, ela apenas formula pela negativa: (a) os novos conceitos não devem ser introduzidos em termos estruturais, (b) a concepção estrutural não deve ser requerida para além daquilo que os alunos possam fazer sem ela. O primeiro princípio implica que será pouco ou nada proveitoso introduzir novas noções matemáticas por meio das suas descrições estruturais. A abordagem operacional deverá preceder a estrutural uma vez que esta última é muito mais abstracta. O segundo princípio sugere-nos que uma abordagem estrutural não tem muitas hipóteses de motivar, senão quando for indispensável para passar a um nível superior da teoria. No caso das funções, a forma como elas aparecem no contexto do cálculo básico, os alunos podem utilizar apenas uma concepção operacional do conceito. A visão das funções como objectos só é necessária quando os problemas a serem resolvidos envolvem a manipulação de várias funções em simultâneo e, assim, cada uma delas deve ser tratada como formando um todo, portanto de uma forma mais estrutural (Sfard, 1989, 1992).

O conceito de função começa a ser uma das ideias centrais da Matemática moderna, pelo que tem sido considerado com muita atenção ao longo dos currículos do ensino secundário (Sfard, 1989). No entanto, o facto de o conceito de função ser ensinado de forma estrutural vai contradizer o modelo de aquisição atrás descrito e apresenta três consequências principais que foram estabelecidas a partir do trabalho realizado com alunos de escolas de Jerusalém (Sfard, 1989). Uma das consequências refere-se ao facto de a concepção estrutural de função ser rara nos alunos. Estes apresentam alguma dificuldade em considerar uma colecção de pares ordenados como uma entidade única. Algumas entidades abstractas como o domínio, contradomínio, objectos e imagens são, por vezes, vagos e a confusão geral é a reacção mais comum a problemas que requerem identificação das diferentes componentes de uma dada função. Outra consequência do ensino do conceito de forma estrutural reside no facto de a principal dificuldade com a definição de função não ser interpretada para além do que está incluído nela, mas antes no que lhe falta. Assim, embora a definição não utilize a noção de operação, a maioria dos intervenientes, num estudo onde as funções foram abordadas de forma estrutural, associaram as funções a processos computacionais. A concepção de função, nos alunos, acaba por ser determinada operacionalmente e não estruturalmente. Outras dificuldades que os alunos encontraram relacionavam-se com a identificação de funções idênticas desde que as suas expressões analíticas fossem diferentes, e com a interpretação da função constante, pois eles precisavam de ter a variável independente para poder determinar a dependente. A terceira consequência do ensino do conceito de forma estrutural refere-se à tendência dos alunos em associar as funções com fórmulas algébricas, parecendo ser um processo bastante comum para merecer uma atenção especial. Sfard considera, no entanto, que esta tendência tanto pode ser indicativa de uma concepção operacional, isto é, o aluno pode entender a fórmula como uma pequena descrição de um algorítmo computacional, como de uma concepção estrutural, a fórmula pode ser interpretada como uma relação estática entre pares ordenados. Vinner (1983), com base num estudo realizado em escolas de Jerusalém, verificou que quando o conceito de função era ensinado com base na definição de Dirichlet (função é uma correspondência entre elementos de dois conjuntos), cerca de 57% dos alunos utilizavam esta definição, ou uma sua reformulação, para descrever o conceito de função. No entanto, quando se pretendia que a definição fosse utilizada como forma de raciocínio na resolução de situações funcionais apenas 34% dos 57% utilizam a definição aprendida. Vinner e Dreyfus (1989) também chegaram à conclusão que à medida que aumentam os anos de escolaridade na disciplina de Matemática maior tendência os alunos têm para utilizar a definição de Dirichlet.

Com base no estudo feito com outro grupo de alunos das escolas de Jerusalém, Sfard (1989) procurou caracterizar a forma como os alunos compreendiam o conceito de função a partir de uma abordagem operacional. Para tal foi implementado um tipo de ensino onde os dois princípios atrás referidos foram verificados. A observação das aulas levou à conclusão de que nas primeiras tentativas de transição para a abordagem estrutural, os alunos encontraram alguma resistência e falta de compreensão. As dificuldades foram diminuindo com o tempo, mas nunca desapareceram totalmente. A interpretação de uma representação onde não houvesse algo de computável era considerada como não sendo função. Os resultados de um inquérito feito a estes alunos, com um grupo de controlo, foram satisfatórios. Embora as várias respostas sejam no sentido de uma concepção operacional em vez de estrutural, houve algum progresso relativamente à observação das aulas e ao grupo de controlo. Apesar da concepção estrutural não ter sido adoptada por todos os alunos, Sfard considera que existem razões para considerar que o perigo de concepções "mutiladas" ("mutilated") foi consideravelmente diminuído. Apenas um pequeno grupo de alunos considerou o termo função como sinónimo de fórmula ou equação.

Outro estudo que ilustra a preferência por uma abordagem processual ou estrutural na representação de relações funcionais é conduzido por Dreyfus e Eisenberg (1981, 1982), referido por Kieran (1992). Eles investigam as bases intuitivas do conceito de função entre os alunos do 6º ao 9º grau a partir de questões que se situam quer num contexto concreto, quer abstracto e que dizem respeito às noções de imagem, objecto, crescimento, extremos e declive, utilizando três cenários representacionais: gráficos, diagramas e tabelas de pares ordenados. As conclusões a que chegaram referem que os alunos com mais aptidões preferem utilizar os gráficos em todas as questões, enquanto que os alunos mais fracos preferem a representação tabular. Pensando que, nem no cenário gráfico, nem no tabular, se especifica directamente como calcular um valor por meio de outro, este estudo parece sugerir que os alunos mais fracos estão aptos a deduzir esta informação mais facilmente do cenário tabular do que do gráfico.

Cuoco (sem data) utiliza os termos *processos* e *objectos* no mesmo sentido que Sfard considera as concepções operacional e estrutural. Cuoco defende três argumentos que podem ser utilizados para explicar por que é que os alunos não conseguem movimentar-se entre vários níveis de compreensão no caso das funções. Um primeiro argumento tem a ver com o facto de o currículo e os temas relacionados com o cálculo nele incluído não ter em conta os diferentes níveis da utilização do conceito de função. A noção de função como processo é muitas vezes completamente omitida e a noção de função como objecto é tratada no contexto de representar graficamente funções reais de variável real, um ambiente que, por vezes, assume que os alunos são capazes de passar de uma visão processual para interpretar o conceito como um objecto. Outro argumento refere-se ao facto de os alunos interiorizarem certos processos antes de chegar ao grau 9-12 (High School) e o processo de concepção de função pode aparecer mais cedo na vida matemática dos alunos se eles forem colocados em ambientes de aprendizagem apropriados (por exemplo os que encorajam a modelação de processos com o computador). O terceiro argumento refere que a elaboração do processo de concepção das funções como objectos é mais difícil do que a sua visão como processos.

3 - Compreensão do conceito de função pelos alunos

A compreensão geral do conceito de função inclui vários aspectos, tais como estar apto a utilizar o conceito em campos exteriores à Matemática em conjunto com o seu uso em diferentes contextos no seio da própria Matemática. Apresentam-se, de seguida, algumas das componentes da compreensão do conceito de função, sem ter por objectivo apresentar uma enumeração exaustiva das mesmas.

A compreensão de um conceito não pode ser vista como um processo linear, como algo que se aprende a partir de uma definição ou da comparação entre exemplos e contra-exemplos do objecto definido. Schoenfeld, Smith e Arcavi citados por Eisenberg (1994), verificaram que o conhecimento adquirido através da exploração de gráficos de funções algébricas simples no plano cartesiano deve passar por quatro níveis de compreensão. O primeiro nível tem a ver com a macro-organização do conhecimento num nível esquemático. Por exemplo, compreender que na equação da recta $y=mx+b$ o m representa o declive e o b representa a intersecção com o eixo dos *YY*. O segundo nível tem a ver com o conhecimento compilado, macro-entidades e vínculos. Por exemplo se $m>0$ indica que a função cresce, o ponto $(0,b)$ é a intersecção da recta com o eixo dos *YY*, etc. O terceiro nível está relacionado com uma superestrutura mais refinada de suporte do conhecimento, como a concepção de que o declive $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ de uma linha através de dois pontos dados pode ser ensinado como dois segmentos de recta orientados e que quando $x=0$ em $y=mx+b$ obtemos a intersecção da linha com o eixo dos *YY*. O quarto nível surge quando as aplicações são limitadas fora de contexto e os indivíduos constroem átomos conceptuais como os que podem ser vistos no nível três. Para adquirir uma profunda compreensão de qualquer tópico os autores consideram que deveremos passar necessariamente através destes níveis.

Sierspinska (1992), a partir do trabalho de vários autores, considera quatro categorias de actos de compreensão como fundamentais. A primeira é a *identificação* (de um objecto entre vários). O resultado deste acto é algo que está longe para nós, um mero acontecimento e que, inesperadamente, toma forma, tal como nas experiências do gestaltismo passando a ser considerado como algo valioso para o estudo e o seu nome acaba por ganhar na nossa mente o estatuto de termo científico. Uma segunda categoria é a *discriminação* (entre dois objectos). Esta categoria desperta a nossa atenção para a existência de dois objectos distintos e, para além de notarmos as diferenças entre eles, notamos também as suas propriedades relevantes. A *generalização* é a terceira categoria e está relacionada com o facto de estarmos conscientes da possibilidade de estendermos o alcance das aplicações, podendo assim descobrir novas possibilidades de interpretação. Por último, a *síntese* é a categoria que se refere à percepção das ligações entre os factos isolados, resultando em propriedades, relações, etc., que se organizam num todo consistente.

A compreensão do conceito de função envolve várias dimensões da aprendizagem, de complexidade crescente, e está relacionada com a forma como os alunos interpretam as suas diferentes representações. Na tentativa de caracterizar a forma como os alunos compreendem o conceito de função, logo no início do seu estudo, Markovits, Eylon e Bruckeimer (1986) identificam dois estados para que possa haver uma boa compreensão: o *passivo*, considerado mais fácil e envolvendo por exemplo situações de classificação e identificação e o *activo*, considerado mais complicado e que pode ser expresso em termos de fazer algo, dar exemplos, etc. Para a compreensão do conceito de função numa fase inicial do seu estudo consideraram como fundamentais as seguintes componentes: 1) a capacidade de classificar relações em funções e não funções dando exemplos de ambas; 2) dada uma função a capacidade de identificar objectos, imagens e pares de objecto imagem, bem como a capacidade de, dada uma imagem, identificar o objecto que lhe corresponde e vice-versa; 3) a capacidade de identificar funções idênticas e de fazer a transferência entre as diferentes representações e 4) a capacidade de identificar e dar exemplos de funções que estejam sujeitas a representações diferentes, em diferentes partes do seu domínio. A partir da aplicação de um questionário a cerca de 400 alunos do 9º grau, foram as seguintes as conclusões a que chegaram: a) há três tipos de funções que causam dificuldades: a função constante, as funções definidas por ramos e as funções definidas por um conjunto discreto de pontos. Há uma abstracção geral ao domínio e contradomínio e a atenção é centrada na questão colocada, quer explícita, quer implicitamente; b) quer na forma gráfica, quer na forma algébrica, o conceito e a representação de objectos e imagens só é parcialmente compreendido; c) a variedade de exemplos que os alunos utilizam refere-se, essencialmente, à forma gráfica e algébrica, mas sobretudo à última; d) a passagem da forma gráfica para a algébrica é mais difícil do que a passagem da algébrica para a gráfica e ambas são condicionadas pela variedade de exemplos que os alunos conhecem; e) a "complexidade" de manipulações técnicas inibe o sucesso; f) quando se pedem exemplos de funções há uma certa tendência para a linearidade; e g) muitas das dificuldades encontradas situavam-se nas funções definidas por ramos.

Para além das componentes descritas por Markovits, Eylon e Bruckeimer, que apresentam uma relação muito estreita com o desenvolvimento currícular do estudo das funções, há outras componentes de âmbito mais geral. Assim, segundo Sierpinska (1992) uma das primeiras condições para a compreensão das funções está relacionada com a existência do mundo que nos rodeia. De facto, este mundo pode, com frequência, ser uma fonte de problemas, no entanto, a percepção das relações e das regularidades entre eles tem sido uma forma de lidar com as mudanças. Assim, a identificação das mudanças observadas no mundo circundante como um problema prático a resolver e a identificação de regularidades em relações entre mudanças, como uma forma de lidar com estas parecem ser os primeiros e mais fundamentais actos da compreensão de funções, (Sierpinska, 1992). Para uma melhor compreensão as funções deveriam primeiro aparecer como modelos de relações, tal como no início da história. Leinhardt, Zaslavsky e Stein (1990) consideram que, ocasionalmente, a abordagem matemática incorpora aplicações do mundo real que vão criar, nos alunos, uma compreensão mais profunda de conceitos matemáticos mais abstractos podendo assim incrementar a motivação a partir da relevância e significado familiar que eles encontram nos problemas. As ideias intuitivas das relações funcionais, que são desenvolvidas através da percepção global dos fenómenos físicos, criam nos alunos um conhecimento de base intuitivo que inclui noções de dependência, causalidade e variação. Os alunos notam, assim, que as coisas estão relacionadas no mundo real e esperam encontrar algum padrão, nesta mudança, ao longo do tempo (Leinhardt, Zaslavsky e Stein, 1990).

Com frequência os alunos apresentam dificuldades em identificar o que é uma variável ou quais são as variáveis envolvidas no processo. Eles não analisam a situação, mas tomam-na como um todo. Segundo Leinhardt, Zaslavsky e Stein, (1990) as variáveis são os objectos das funções, são os dados, quer concretos, quer abstractos. Assim, a noção de variável é considerada fundamental para compreender muitas relações funcionais e representações gráficas, argumentando-se, mesmo, que conhecer o conceito de variável é um pré-requisito para uma completa compreensão das funções. As variáveis podem ser interpretadas de duas formas: uma mais estática onde a variável se destaca como uma ferramenta para generalizar ou descrever padrões, sendo normalmente associada com símbolos algébricos (Wagner e Kuchemann citados por Leinhardt, Zaslavsky e Stein, 1990), e outra mais dinâmica onde a sua essência capta a variabilidade e mudanças simultâneas de uma variável em comparação com outra, podendo ser representada de diferentes formas, como por exemplo um gráfico ou uma notação funcional (Janvier citado por Leinhardt, Zaslavsky e Stein, 1990). Sierpinska, (1992) considera que, para uma melhor compreensão do conceito, tem que haver a identificação dos objectos que mudam ao estudar uma dada mudança e que ao trabalharem com funções, os alunos devem conseguir fazer a distinção entre as quantidades que são dadas e as que são desconhecidas, isto é, devem ter uma percepção clara entre constantes e variáveis. Por vezes, os alunos consideram que mudando o símbolo da variável, numa dada equação funcional, mudam alguns aspectos críticos da função. Esta visão sugere que eles se focam excessivamente na substituição do símbolo arbitrário e esquecem a ideia central da relação funcional entre as variáveis.

Uma outra questão, que levanta problemas acerca da compreensão do conceito de função, prende-se com a relação de assimetria existente entre as variáveis dependente e independente (Sierpinska, 1992). Ela considera que, embora para nós esta condição não levante problemas, parece que os alunos deparam com grandes dificuldades quando pretendem calcular o objecto de uma dada imagem e esta relação não é uma correspondência unívoca. Leinhardt, Zaslavsky e Stein (1990) referem dois tipos de dificuldades que os alunos encontram quando lidam com a noção de correspondência: a crença de que as funções devem incorporar a correspondência um-a-um e a confusão entre as correspondências vários para um e um para vários. Vinner (1983) verificou que os alunos crêem que se a cada valor de x corresponde apenas um valor de y então o contrário também deve ser verdade.

A Álgebra e os métodos algébricos são ferramentas necessárias para o estudo das funções. Sem a sua existência seria difícil os alunos compreenderem o significado de inscrições, tais como $y= (x)$ e $f(x)= (-x)$. No entanto, a capacidade algébrica acompanhada da crença de que o poder da Álgebra resolve todas as espécies de problemas, pode ser um impedimento para a compreensão do conceito geral de função, (Sierpinska, 1992), pois, por um lado, há uma forte crença no poder das operações formais nas expressões algébricas e, por outro, parece que só as relações descritas por fórmulas analíticas são adequadas para ter o nome de funções (Sierpinska, 1992; Vinner e Dreyfus, 1989). Assim, para que o conceito de função seja mais facilmente compreendido deve promover-se a discriminação entre a função e as ferramentas analíticas, muitas vezes usadas para descrever a sua lei (Sierpinska, 1992). Esta discriminação deve ser promovida, entre os alunos, por forma a despertar a sua atenção para exemplos onde uma função pode ser descrita de diferentes formas, tais como: tabelas, gráficos e expressões analíticas. Para Eisenberg (1992) uma das principais componentes para se compreenderem as funções reside no facto de se conseguir a ligação entre as representações gráfica e algébrica. Segundo Janvier, citado por Leinhardt, Zaslavsky e Stein (1990), passar de uma equação para um gráfico envolve processos psicológicos diferentes dos da passagem do gráfico para a equação. Estes dois tipos de passagem entre representações são os mais usuais e Leinhardt, Zaslavsky e Stein (1990) sugerem que a passagem do gráfico para as equações é a tarefa mais difícil, pois envolve a detecção de padrões enquanto que traçar o gráfico de uma equação envolve uma série de passos directos, em geral, definir pares ordenados, representá-los no plano cartesiano e uni-los por uma linha.

Um gráfico representa uma função de uma forma simbólica indirecta e essa representação, por si só, é estática acabando por esconder todo o dinamismo das funções (Sierpinska, 1992). As funções podem ser representadas de diferentes maneiras, mas a representação não é o mesmo que a coisa representada. Devemos, portanto, fazer a distinção entre as diferentes maneiras de representar funções e as próprias funções. É, no entanto, necessário estar atento às limitações de cada uma das representações e ao facto de que elas designam um e o mesmo conceito geral pelo que estas diferentes representações são fundamentais para compreender as funções. A capacidade de interpretar um gráfico ou uma tabela não é fácil de adquirir, Artigue (1992) e é ao longo da aprendizagem que estas capacidades encontram condições favoráveis para ocorrer. As tabelas são consideradas as mais antigas formas de representar funções. No entanto, se as tabelas forem identificadas com funções é possível que todas as funções sejam interpretadas como sequências (Sierpinska, 1992). Deve, assim, ser feita uma discriminação entre as noções de função e sequência para que não sejam identificadas tabelas de funções com as próprias funções, cuja consequência pode levar a crer que os métodos de interpolação dão valores exactos de funções em pontos intermédios.

Parece difícil sintetizar a noção de função, logo no início do seu estudo, a partir da forma como esta aparece no nosso dia-a-dia. Ela só é necessária a partir do momento em que se lida com espaços ou classes de funções. Assim, a conceptualização do conceito deve ir mais longe do que um mero estado do processo e o conceito deve tornar-se num objecto que a mente pode manipular como um elemento (Sierpinska, 1992). Neste sentido parece ser importante, para uma melhor compreensão do conceito, que seja feita uma discriminação entre as definições matemáticas e as descrições dos objectos. Tal como Sfard (1989) sugere, deveremos fazer uma abordagem do conceito por forma a passar de uma concepção operacional para uma concepção estrutural. O facto de ser feita uma abordagem estrutural, no início do estudo do conceito, não dispensa a necessidade de uma abordagem processual, abordagem esta, que vai servir de fundamento para a construção da concepção estrutural (Kieran, 1992). Como conclusão didáctica poderemos inferir que o facto de introduzirmos a definição geral de função muito cedo não faz sentido, quando muito ela será ignorada ou incompreendida (Sierpinska, 1992; Vinner, 1983).

Uma outra condição para a compreensão do conceito de função está relacionada com a discriminação que deve ser feita entre os conceitos de função e o de relação, (Sierpinska, 1992). Peano (1911, citado por Sierpinska, 1992) defende que o conceito de função deve ser reduzido ao conceito de relação e introduz a noção de relação unívoca argumentando que as relações devem se identificadas com algumas relações. Esta noção de função chegou a aparecer em vários manuais do ensino secundário, não sendo muito clara a razão por que tal aconteceu pois, segundo Sierpinska (1992), não era suposto que os alunos operassem em espaços de funções. Assim, a decisão de reduzir as funções a relações é difícil de justificar em termos didácticos. Grize (1968, citado por Sierpinska, 1992) considera que há diferenças entre os dois conceitos sendo o de relação o mais primitivo, e portanto, com um estatuto comprovativo enquanto que o de função apresenta um aspecto construtivo.

4 - Diferentes representações do conceito de função e tradução entre elas

A tradução entre as diferentes representações do conceito de função reflecte a capacidade dos alunos em relacionar funções idênticas com representações icónicas diferentes.

Embora o conceito de função pareça ser uma entidade única e bem definida, ele pode e deve ser interpretado a partir das suas múltiplas representações. Apresenta-se, de seguida, não só as diferentes representações que o conceito pode assumir, como também a interligação entre elas e algumas das vantagens que essa ligação pode trazer para a compreensão do conceito. São, ainda, consideradas algumas investigações feitas neste âmbito.

As diferentes representações do conceito de função permitem diferentes *insights* que facilitam uma compreensão poderosa e completa deste conceito (Even, 1990). Os alunos devem estar aptos a compreender conceitos em diferentes representações e a fazer ligações entre elas.

O ensino das funções necessita ser articulado por forma a englobar as representações mais importantes, nomeadamente, a forma gráfica, tabular e algébrica. Embora, actualmente, a forma algébrica ainda tenha um peso muito grande nos currículos, a interpretação dos traços gráficos de funções começa a ter um papel preponderante. Na realidade, as ideias de variação, tais como, crescimento, decrescimento, constante, máximo e mínimo, taxa de variação, variação rápida, continuidade ou descontinuidade estão presentes na representação gráfica.

Segundo Confrey e Smith (1992) construir uma representação das funções através de representações múltiplas e problemas contextuais estabelece uma alternativa para funções que sugere que a experiência de trabalhar em situações funcionais, construindo funções, é mais importante que aprender definições estáticas que mascaram a sua base na actividade humana. Confrey e Smith (1992) e Borba (1993) utilizam como base para o estudo das funções um programa de computador onde as múltiplas representações, que incluem tabelas, gráficos, equações, teclas de calculadora, diagramas de árvore e gráficos de barras, são uma das suas principais componentes.

As representações mais comuns são as expressões analíticas e os gráficos cartesianos. No entanto, Mundy e Lauten (1993) identificam seis modos diferentes de representar funções: fenómenos reais, regra verbal, diagrama, tabela, gráfico e fórmula. No trabalho de Verstappen (1982, citado por Kieran, 1992), distinguem-se três categorias de representação de relações funcionais utilizando linguagem matemática: geométrica — esquemas, diagramas, histogramas, gráficos, esboços; aritmética — números, tabelas, pares ordenados; e algébrica — símbolos literais, fórmulas.

Apesar de ser importante ter muitas representações de um conceito, a sua existência, por si só, não é suficiente para criar um uso flexível do conceito na resolução de problemas (Dreyfus, 1994). Nós não obtemos o suporte que é necessário para manobrar com sucesso a informação usada na resolução de problemas, senão quando as várias representações estão correcta e fortemente ligadas. Precisamos da possibilidade de ligar uma representação a outra, enquanto a outra for a mais eficiente para o próximo passo que queremos dar. Assim, para Dreyfus (1994) o processo de ligar representações está intimamente associado com o de as representar. As funções são um exemplo claro. Trata-se de um conceito abstracto com que usualmente trabalhamos numa ou em várias representações, sendo frequentemente utilizadas a representação algébrica e gráfica. O ensino e aprendizagem deste processo de ligação não é fácil, porque a estrutura é muito complexa, sendo necessário lidar com uma grande quantidade de informação. Os alunos, geralmente, revelam alguma falta de experiência e acabam por utilizar apenas uma das representações. O uso de várias representações ajuda-os a fazer a transição de uma compreensão concreta e limitada de um tópico, para outra mais abstracta e flexível. Para Dreyfus (1994), os processos de aprendizagem que envolvem as relações entre as representações e a sua abstracção podem ser vistos por forma a englobar quatro estados: 1) usar uma representação simples, 2) usar mais do que uma representação em paralelo,

3) fazer ligações entre representações paralelas e 4) integrar representações e ligações flexíveis entre elas. Esta forma de conceber a aprendizagem das múltiplas representações tem em vista estabelecer uma concepção cada vez mais abstracta dos conceitos. O processo que está intimamente relacionado com a ligação de representações é a tradução, segundo Dreyfus (1994), podendo esta significar a passagem da formulação de uma relação matemática para uma outra. Leinhardt, Zaslavsky e Stein (1990) utilizam o termo tradução para descrever a passagem de uma representação para outra e consideram que a tradução envolve três processos principais: a) o acto de reconhecer a mesma função nas diferentes formas da sua representação; b) identificar para uma transformação específica de uma função numa representação, a sua transformação correspondente noutra representação e c) construir uma representação de uma função dada uma outra. Segundo Vinner e Dreyfus (1989) as tarefas que envolvem tradução são fundamentais para o conceito de função, quer este tenha aspectos gráficos poderosos ou não. No caso em que o conceito não tem aspectos gráficos poderosos eles consideram que as imagens incluem principalmente representações simbólicas ou fórmulas assim como o conjunto de todas as propriedades associadas com o conceito. Segundo Leinhardt, Zaslavsky e Stein (1990) os estudos que incluem tarefas de tradução focam-se sobretudo nas conexões entre as representações gráfica e algébrica das funções e acabam por estar de alguma forma ligados à utilização de tecnologias gráficas.

A tradução entre as diferentes representações de funções parece ser uma forma de abordagem que permite uma melhor compreensão destas. Kreimer e Taizi (1983) utilizam a comparação e a tradução entre as representações algébrica e gráfica de várias funções e concluem que este tópico é importante por três razões: 1) representa um método independente do cálculo para tratar funções e por isso adequado para alunos mais novos; 2) educa os alunos a serem flexíveis na utilização de diferentes representações de um conceito matemático; e 3) a "função" é um conceito básico em Matemática e é parte da educação moderna, ao longo de vários anos. Esta é a razão pela qual, usando este conceito para alargar o ângulo de abordagem de problemas que lidam com funções, é de especial importância.

Goldenberg (1988) afirma que o senso comum suporta a noção de que as múltiplas representações poderão ajudar na compreensão dos conceitos. Quando usadas cuidadosamente, as ligações entre múltiplas representações aumentam a redundância e podem assim reduzir as ambiguidades que podem aparecer numa representação particular. Para Goldenberg (1988) a tradução através das múltiplas representações pode ajudar a reduzir o isolamento de cada conteúdo matemático e ajudar a encontrar uma visão mais coerente e unificada do método matemático e do conteúdo.

Weigand (1993) investigou a compreensão e o uso de diferentes representações em sequências iteractivas com alunos que tinham apenas um ano de cálculo e nunca tinham estudado sequências nem o conceito de iteração. Era permitida a utilização do computador embora muitos dos alunos nunca o tivessem utilizado. No que se refere à compreensão das representações, chegou à conclusão de que a interpretação das propriedades da sequência iterativa dependiam das representações que eram consideradas. Isto significa que os alunos deveriam perceber o conceito de representação. Enquanto os alunos, inicialmente, construíram as suas ideias do conceito de sequência iteractiva a partir das representações consideradas, a intervenção dos professores serviu apenas para ajudar a completar o processo, uma vez que eles não identificaram novos aspectos, mas apenas compararam as representações dos alunos por forma a relacioná-las com conceitos prévios. Weigand considera, assim, que o ensino da Matemática deve começar pela experiência dos alunos, sendo necessário utilizar uma variedade de representações e destacar, mais claramente, as contribuições específicas das representações individuais para os conceitos matemáticos correspondentes. Isto só é possível se, quer os professores, quer os alunos tiverem um "sistemático, seguro e psicologicamente válido conhecimento acerca das representações" (p.487) (Kaput, 1987, citado por Weigand, 1993). Segundo Weigand, além deste conhecimento, os alunos devem, por vezes, ter a oportunidade de usar esta variedade de representações e quando o ensino comporta estes elementos o computador pode ser uma ferramenta indispensável.

Artigue e Dagher (1993) utilizam um jogo, em computador, para compreenderem quais as estratégias que os alunos utilizam e que conhecimento matemático adquirem quando se tenta fazer a tradução da representação gráfica para a algébrica. O computador traça um dado gráfico, recta ou parábola, e os alunos têm que encontrar a respectiva representação algébrica. No caso da parábola, por exemplo, eram dadas as seguintes representações, Ax^2+Bx+C; $A(x-P)^2+Q$ e $A(x-R)(x-S)$ Artigue e Dagher identificaram três tipos básicos de estratégias: o uso de coordenadas, leitura e estimação e tentativa e erro. Uma análise mais cuidada das actividades dos alunos mostrou que poderiam ser definidas três situações diferentes em termos de estratégias:

a) os alunos jogam de uma forma desorganizada sem utilizar feedback, sendo verificada uma frequente mudança da expressão algébrica sem sucesso;

b) o aluno sabe o suficiente para ser capaz de adoptar uma estratégia elaborada de leitura e estimação, onde os alunos são capazes de interpretar o sinal do A e de ler o P,Q,R e S, e sendo esta uma estratégia que geralmente aparecia no final das sessões, alguns alunos utilizaram-na logo desde o início. Há, no entanto, a particularidade de no caso da representação Ax^2+Bx+C os alunos lêem o C, estimam um valor para A, calculam o valor de B com base nos anteriores e no caso de falha voltam a estimar novo valor para A. Esta é a táctica usada pelos alunos que utilizam a estratégia de leitura/estimação com sucesso; o B nunca é interpretado directamente;

c) os alunos que organizam o jogo com a táctica anterior desde o seu início. Ao tentar explicar como é que o sucesso do jogo é considerado sucesso no meio ambiente usual, Artigue salienta o facto das estratégias não serem efectivamente iguais e considera que as estratégias b) e c) conduzem a uma quase completa transferência de conhecimento que, aparentemente, foi adquirido durante a sessão.

Borba (1993) considera que a existência de pontos discretos é uma forma de facilitar a compreensão dos alunos acerca da transformação de funções e sugere que a utilização de pontos discretos é uma ferramenta muito importante para estabelecer a ligação entre os gráficos e as tabelas e, um pouco menos importante, entre as tabelas e a Álgebra.

5 - O papel das ferramentas computacionais

Uma vez que a abordagem do conceito de função deve ser feita por forma a englobar as diferentes representações, a utilização de ferramentas computacionais parece ser uma forma prática de ultrapassar alguns problemas de representação, sobretudo os da representação gráfica. A existência de ferramentas como a calculadora gráfica e o computador vem-nos pôr à disposição um conjunto de programas — folhas de cálculo e programas de traçado de gráficos entre outros — que tornam os conceitos funcionais e as suas aplicações acessíveis a todos os alunos. Os gráficos em computadores oferecem-nos enormes esperanças para alargar a compreensão dos alunos de importantes ideias matemáticas e para proporcionar métodos visuais alternativos na resolução de problemas (Fey, 1991).

Segundo De Corte (1992), um modelo de concepção de ambientes de aprendizagem ideais, que envolve conteúdos, métodos de ensino, sequência de tarefas de aprendizagem e contexto social de aprendizagem, oferece um quadro adequado para o desenvolvimento de poderosos ambientes de aprendizagem que só se tornam possíveis ou compensadores com a utilização das novas tecnologias de informação. Com a introdução das novas tecnologias, em particular do computador, é possível recorrer a modelos, quer de comportamentos típicos do especialista, quer de processos físicos impossíveis de realizar até aqui e, uma vez integrados na tecnologia, estes modelos e processos podem ser observados tantas vezes quantas as necessárias. Por outro lado, os ambientes de computador podem estimular a reflexão nos alunos através da comparação dos seus desempenhos com os de um especialista, bem como através de repetições e concretizações que frisem os passos fundamentais num processo de resolução de uma actividade (De Corte, 1992). Segundo Collins (1989, citado por De Corte, 1992) a utilização do computador vem permitir que os alunos tornem as suas ideias em ideias testáveis, bem como fornecer instrumentos e situações que lhes permitam enunciar as suas ideias perante o professor ou os colegas. O recurso a micromundos e simulações oferece uma ampla oportunidade para a exploração de problemas novos, hipóteses, métodos e estratégias em ambientes que imitam situações e tarefas da vida real. O computador também pode contribuir para a generalização, ao mostrar como certos conceitos, princípios e métodos podem ser aplicados para esclarecer e resolver problemas noutros domínios (De Corte, 1992).

Ao tentar responder à questão: serão os gráficos de funções mais acessíveis para os alunos que as representações simbólicas? Goldenberg (1988) coloca estas duas formas de representar ao mesmo nível, pois considera que para interpretar gráficos correctamente, nós necessitamos de conhecimento matemático e expectativas e não apenas de experiência perceptual. A partir do seu trabalho com o programa *Function Analizer* Goldenberg (1988) concluiu que o desenvolvimento de software gráfico simples, ou o seu uso descuidado nas aulas, pode futuramente obscurecer aquilo que já agora é difícil de ensinar; e que o desenvolvimento cuidadoso de software gráfico apresenta novas oportunidades para focar a mudança e para importantes conteúdos matemáticos que não eram acessíveis antes.

A utilização da tecnologia gráfica é a forma mais comum de estabelecer a ligação entre as diferentes representações da função. Segundo Goldenberg (1988) o aparecimento de software que liga as representações simbólica e gráfica deve-se essencialmente a três razões: a) a necessidade de incrementar a ênfase nos gráficos ao longo do currículo; b) é teoricamente razoável que representações visuais apropriadas ajudem a encontrar significado e talvez promovam a aprendizagem do sistema simbólico com que a Álgebra dos alunos se defronta e c) a tecnologia computacional presta-se melhor para esta aplicação.

Fey (1991) também destaca a facilidade que é oferecida pelo computador para passar de uma forma de representação de informação para outra. Existem, segundo este autor, várias razões pelas quais as representações múltiplas baseadas no computador são prometedoras:

— o carácter dinâmico das representações de ideias e procedimentos matemáticos. Como exemplo, podemos considerar as mudanças num gráfico de uma função correspondentes às alterações dos parâmetros da sua expressão analítica que dificilmente poderão ser visualizados sem o computador;

— a flexibilidade das representações em se adaptarem a propósitos concretos do indivíduo. O utilizador pode escolher as formas de representação mais adequadas à resolução de determinado problema, podendo, ainda, receber *feedback* correctivo, sempre que for necessário;

— a representação electrónica pode ser um intermediário para a abstracção. Com o auxílio das representações computacionais os alunos podem deslocar-se facilmente de um pensamento concreto para uma forma de raciocínio mais simbólica e abstracta;

— a facilidade de representação gráfica do computador permite criar novas espécies de representações matemáticas. O utilizador pode criar novas representações de acordo com as suas necessidades;

— as representações em computador constituem novos e poderosos instrumentos para a resolução de problemas. As representações numéricas, gráficas e simbólicas adquirem, com a utilização do computador, uma precisão que as distingue de simples esboços heurísticos ou de meros pontos de partida para soluções mais rigorosas.

Confrey e Smith (1992) e Borba (1993) utilizam como base para o estudo das funções um *software* que permite a utilização de diferentes "peças": protótipos, referindo-se a classes e funções; transformações como forma de criar modelos mais versáteis e como forma de revelar a invariância entre diferentes classes (protótipos) de funções; problemas contextuais para que os alunos possam relacionar as suas acções com as características da função; e múltiplas representações que incluem tabelas, gráficos, equações, teclas de calculadora, diagramas de árvore e gráficos de barras.

As representações gráficas feitas em computador ou calculadora podem encorajar a manipulação algébrica (Demana e Waits, 1990). A sobreposição de gráficos de várias funções, facilmente acessíveis através dos computadores e das calculadoras, ajuda no estudo da influência dos vários parâmetros numa dada família de funções.

Guttenberger (1992), a partir do estudo das funções trigonométricas no computador, chegou à conclusão de que este teve um efeito positivo na formação do conceito imagem e construção de conceitos por parte dos alunos. Concluiu também que os alunos que estavam mais activamente envolvidos no processo de aprendizagem, os que utilizavam o computador, retinham os conceitos por um maior período de tempo e que o uso de software interactivo em conjunto com um estudo guiado baseado na aprendizagem pela descoberta e raciocínio visual pode ser uma boa estratégia para o ensino das funções.

Relativamente ao desenvolvimento de interacções entre as representações algébrica e gráfica, Zehavi (1986) concluiu que o tratamento numérico não é suficiente, a contribuição de programas de traçado de gráficos é limitada e os melhores resultados são obtidos quando há uma interacção entre os dois sistemas de representação.

Drijvers (1993), a partir da utilização da calculadora gráfica na sala de aula, chegou à conclusão de que o facto de ser possível desenhar um grande número de gráficos de funções pode ser uma ferramenta poderosa para estudar conjuntos de funções, podendo os gráficos ser utilizados para futura investigação da estrutura e traços específicos destes conjuntos de funções. Por outro lado, os gráficos podem fornecer argumentos no raciocínio e no processo de conjecturas, verificação e falsificação por forma a ajudar os alunos a construir a sua própria teoria.

6 - Papel da visualização

A visualização matemática é referida por Cunningham e Zimmermann (1991) como sendo a capacidade dos alunos de desenhar um diagrama apropriado (mentalmente, com papel e lápis ou com base no computador) para representar um conceito matemático ou problema e usá-lo para alcançar compreensão. A visualização matemática é, assim, um processo de formar imagens e utilizá-las eficazmente na descoberta e compreensão matemáticas.

Na Matemática em geral, e nas funções em particular, o raciocínio visual parece ter um papel importante, chegando mesmo a ser aceite como prova, argumentos visuais. Quando se faz um estudo das funções a partir da interpretação de gráficos, parece ser pertinente questionar qual será o papel da visualização e quais as suas implicações pedagógicas?

A visualização, no seu sentido mais amplo, tem sido importante na Matemática. Na Grécia antiga os geómetras esboçavam diagramas na areia; o cálculo nasceu do esforço geométrico para resolver problemas de tangentes, medidas, áreas, etc., e até mesmo o vocabulário para comunicar ideias era visual.

Quando os estudos matemáticos começaram a desenvolver-se em áreas mais abstractas, a visualização começou a ser vista com maior fragilidade. No entanto, retomando o lado mais intuitivo e visual da Matemática, abrem-se novas possibilidades para o trabalho matemático, especialmente agora que os computadores têm um grande poder de resolução para o suportar com representações exactas dos problemas e das suas soluções. Segundo Cunningham (1991) as vantagens da visualização incluem a capacidade de focar componentes específicas e detalhes de problemas muito complexos, mostrando as dinâmicas dos sistemas, os processos e a crescente intuição e compreensão dos problemas e operações matemáticas. Integrando a visualização no ensino da Matemática promove-se a intuição e compreensão e permite uma vasta cobertura de conteúdos matemáticos. Os alunos não só aprendem Matemática, como também aprendem novas formas de pensar e fazer a sua própria Matemática (Cunningham, 1991).

Segundo Keeler (citado por Cunningham, 1991) podemos encontrar três espécies de visualização que nos é oferecida a partir de representações feitas em computador: pós-processada (*postprocessing*), onde o conhecimento é completo e o utilizador cria uma representação acabada daquilo que pretende visualizar, sendo um exemplo da modelação quantitativa; de acompanhamento (*tracking*), onde o conhecimento começa a ser desenvolvido e o utilizador vai acompanhando a sua exibição para estudar a sua natureza; e condutiva (*steering*), onde o utilizador está integrado no processo podendo agir e manipular a simulação como se ela estivesse em curso. A visualização educacional pode tirar vantagens destas ideias, pois uma simulação pode mostrar imagens estáticas que representam os resultados de um cálculo computacional simples, imagens dinâmicas que representam o comportamento de uma sequência de cálculos, ou o comportamento dirigível que permite, aos alunos, manipular a simulação à medida que esta progride.

Para Cunningham (1991) a maior parte da visualização educacional, actualmente enfatizada, refere-se à visualização pós-processada visto centrar-se na apresentação de conceitos acabados aos alunos. Parece, no entanto, que nalguns estudos informais os alunos aderiram com mais empenho à representação dinâmica de imagens do que à representação estática.

A visualização educacional transmite-se para alunos que tenham algum conhecimento, mas que não sejam ainda especialistas. A sua introdução é muito lenta e precisa de muito esforço para ser efectivamente ensinada, enquanto que a visualização pessoal requer mais conhecimento para o que começa a ser exibido do que aquele que é suposto os alunos terem (Cunningham, 1991).

No que diz respeito à compreensão visual do ensino e aprendizagem, parece que o ensino baseado na visualização requer que nós reaprendamos muitas das nossas capacidades pedagógicas. Não basta que compreendamos Matemática, mas devemos compreender como comunicá-la visualmente. Assim, segundo Cunningham, (1991) um instrutor que utilize a visualização deve:

— determinar exactamente os detalhes críticos a serem apresentados numa imagem e mostrá-los evidenciando-os ou removendo a informação conflitual,

— determinar a ordem em que o material vai ser mostrado pelas imagens e apresentá-lo numa sequência lógica,

— oferecer aos alunos opções por forma a expandir o seu conhecimento matemático sem o confundir ou reprimir,

— procurar oportunidades para apresentar ou desenvolver processos matemáticos dinâmicos e dar aos alunos oportunidades apropriadas para os explorar ou controlar,

— considerar seriamente como poderão os alunos aprender visualizando, como avaliar a aprendizagem e como integrá-la com as outras partes dos seus estudos matemáticos.

Um dos problemas mais difíceis, em visualização, prende-se com o facto de ainda não se saber ao certo como avaliar esta espécie de aprendizagem. No entanto, podemos verificar que a visualização nos oferece intuição, compreensão, e formação de conceitos. Para Cunningham (1991) o resultado mais importante da visualização prende-se com a compreensão de como é que a aprendizagem visual e simbólica se podem completar mutuamente. Neste momento, ainda não há investigação que possa dar uma resposta satisfatória a este problema.

O poder da visualização está directamente relacionado com a concepção de *software* educativo. No caso concreto das funções, Goldenberg (1991) refere que deve haver diferenças entre o *software* gráfico e o *software* gráfico educacional. Há várias razões para que tal se verifique, por exemplo, quando um engenheiro ou cientista usam gráficos estão interessados sobretudo no comportamento de uma função em particular. No caso dos alunos, eles também devem lidar com funções particulares, mas muito do valor educacional está na sua abstracção ou generalização. Assim, Goldenberg (1991) propõe que o *software* gráfico educacional possua as seguintes características: seja fácil modificar e comparar funções, modificar representações gráficas, deve ajudar os alunos a verem pontos discretos, ao longo das formas e a informação das escalas deve estar visualmente presente.

Os padrões de raciocínio que são apropriados e usados em diferentes ambientes visuais variam consideravelmente, ou seja, são construídos diferentes tipos de representações visuais para diferentes formas de raciocínio e cada uma destas representações tem potencialidades específicas de compreender os problemas. Poderemos, no entanto, aproveitar esta forma de representação para ajudar a intuir, compreender e formar conceitos mais facilmente. Borba (1993), através da utilização do software multi-representacional *Function Probe*, concluiu que a importância da visualização em Matemática não deve ser considerada apenas como um utilitário que defende que a mesma nos ajuda a compreender a Álgebra tal como ela é ou que a visualização resolve os problemas do ensino da Matemática, mas antes, deve ser vista como uma forma particular de conhecimento, entre outras, que é parte integrante da actividade matemática.

Se, por um lado, o papel da visualização parece ser importante para o ensino e aprendizagem dos conceitos matemáticos em geral e dos funcionais em particular, por outro, parece haver alguma relutância em considerar as representações visuais como provas. Como exemplo, podemos considerar o trabalho de Vinner (1989) que desenvolveu um curso de Análise, para alunos dos primeiros anos do ensino superior (College), onde foram enfatizados os aspectos visuais por forma a tentar caracterizar as considerações visuais externas que faziam parte do conhecimento matemático dos alunos. Todos os conceitos algébricos que tivessem uma abordagem visual foram considerados, tendo em conta essas imagens e mesmo os teoremas foram interpretados de forma visual sendo, muitas vezes, utilizadas como provas, argumentações visuais. Num questionário foi pedido para provar que se $y=f(x)$ é uma função positiva, estritamente crescente no intervalo [a,b] então

$$(b\text{-}a)\, f(a) < \int_c^x f(x)dx < (b\text{-}a)\, f(b)$$

e para enunciar e provar o teorema da média, provas estas que tinham sido feitas nas aulas em ambos os contextos. Era ainda pedido para indicarem desenhos apropriados em ambas as questões. Os resultados indicaram claramente um enviesamento algébrico que Vinner considera poderem ser devidos a duas razões: a) a crença de que a prova algébrica é mais matemática e mais geral, e b) a preparação para o exame final é, muitas vezes, feita por aprendizagem rotineira.

Eisenberg e Dreyfus (1991) referem que a preferência por argumentos não visuais não é acidental e consideram que existem razões para a fuga à visualização. Uma dessas razões refere-se à crença acerca da natureza da Matemática. Tem-se desenvolvido a ideia de que os argumentos não visuais são utilizados para comunicar as ideis matemáticas. Este costume baseia-se na crença, de muitos matemáticos, professores e alunos, de que a Matemática não é visual, não tendo em atenção se há ou não uma representação visual na base da ideia. Outra razão refere-se a uma visão sociológica, pois o visual é mais difícil de ensinar. Embora muitas vezes a informação processada pelos matemáticos e professores no seu trabalho tenha uma base visual, a matemática escolar é, usualmente, linearizada e algoritmizada e a forma mais eficiente para a apresentar aos alunos é com base em argumentos não visuais, ou seja, faz sentido que os alunos escolham formas analíticas em vez de procedimentos visuais. A terceira razão refere-se a uma visão cognitiva onde se considera que os aspectos visuais do conceito são mais difícieis de interpretar, construindo-se assim uma ideia de eficiência cognitiva. É relativamente mais fácil apresentar um argumento matemático que esteja bem ordenado de uma forma linear e sequencial, do que apresentá-lo de forma esquemática com a ligação entre as várias peças de informação e com implicações em muitas e variadas direcções.

7 - Interpretação gráfica da resolução de equações e inequações

Schwartz (1992) considera que o acto algébrico mais comum que nós alguma vez cometemos, e que é construído à volta do conceito de comparar funções, é a resolução de equações e inequações. Schoenfeld (1987) citado por Schwartz (1992) argumenta que aquilo que os matemáticos sabem acerca da resolução de equações não é mais do que uma colecção de técnicas aprendidas em domínios individuais. Por outro lado, os alunos apresentam grandes dificuldades quando têm que seleccionar os métodos para manipular as expressões ou relações. Eles não parecem ver as coisas certas nas expressões analíticas e, muitas vezes, acabam por escolher os passos seguintes de forma aleatória, sem um propósito específico em mente (Schwartz, 1992). Parece assim que a apresentação de uma relação algébrica, como a comparação entre duas funções, não só não é consistente com a abordagem em termos das expressões algébricas que geralmente fazemos, como nos alerta para a utilização de todas as representações de funções que podem estar envolvidas enquanto resolvemos equações e inequações. Schwartz considera que a resolução de equações e inequações utilizando técnicas gráficas apenas é utilizada nos currículos de Álgebra quando as técnicas analíticas não são possíveis de aplicar. Ele utiliza, como exemplo, a equação $x=tg(x)$ e considera que este método de resolver equações não aparece nos currículos devido à falta de tecnologia que represente facilmente os gráficos, pois a sua resolução algébrica não é particularmente atractiva ou efectiva. Podemos considerar, no entanto, que quando a tecnologia permite o traçado fácil dos gráficos de funções, a resolução de equações e inequações, por via gráfica, torna-se uma técnica atractiva e eficiente por forma a proporcionar a compreensão da natureza essencial destes construtos.

Schwartz (1992) utilizou o software *Function Supposer* com alunos que tinham feito o estudo das equações de forma tradicional, para que eles pudessem estabelecer uma relação entre as regras aprendidas de modo a resolver equações e inequações e a fazer a comparação das funções através dos seus gráficos. Ao igualar duas funções, os alunos destacaram alguns pontos: a) quando não se altera o coeficiente do x os declives mantêm-se e quando estes coeficientes são alterados os declives variam, mas, em ambos os casos, os pontos de intersecção são os mesmos; b) em equações como *-3x=-12* os alunos preferem representar as funções *-3x+12* e zero por ser mais fácil de determinar a solução; c) a equação *x=x* causa algum espanto, pois eles não conseguem definir os pontos de intersecção; d) apresentam dúvidas, na definição do conjunto solução, quando as representações são rectas paralelas. Tal como Kieran (1992) destaca, os alunos apresentam enorme dificuldade em compreender a equivalência das equações que eles geram no processo de encontrar o conjunto solução.

A resolução de equações e inequações, a partir da representação gráfica das funções envolvidas, pode ser uma forma de ultrapassar a confusão que os alunos fazem acerca da distinção entre equações e identidades e deixa à consideração, dos mesmos, a escolha das operações que são permitidas neste ambiente (Schwartz, 1992).

8 - Dificuldades com relações funcionais: interpretação e construção de gráficos

São várias as dificuldades encontradas pelos alunos na interpretação e construção de gráficos. Estas prendem-se, principalmente, com a utilização de escalas, com o facto de considerarem a maior parte das variações como lineares e com as dificuldades em lidar com as variáveis quando estas estão envolvidas em situações de certa complexidade.

Há, essencialmente, três formas de interpretar gráficos cartesianos (Tierney, Weinberg e Nemirovsky, 1992): a) na forma de pontos (*pointwise*) exibindo correspondências entre coordenadas, b) de uma forma mais holística em que o gráfico é considerado como um todo, isto é, o gráfico é percepcionado como contando uma história e c) interpretações pictoriais em que o gráfico é visto como descrevendo um movimento ou uma trajectória.

Janvier (1978) considera que o facto de os alunos apresentarem uma interpretação sob a forma de pontos se deve ao tipo de ensino a que são sujeitos, sendo, normalmente, pedido que representem gráficos a partir de tabelas e depois questionados por forma a poderem utilizar a leitura das mesmas para responderem. Em vez deste tipo de tarefas, Janvier considera que os alunos devem primeiro ser confrontados com gráficos qualitativos de situações concretas, sendo questionados com vista a que interpretem os gráficos de uma forma global e não na forma de pontos. Leinhardt, Zaslavsky e Stein (1990) consideram que há mais dois tipos de interpretações de gráficos que podem levar a interpretações gráficas na forma de pontos. Um deles refere-se à dificuldade que os alunos apresentam em utilizar intervalos em comparação com pontos, como forma de resposta. Por exemplo, quando se pede aos alunos para indicarem onde é que uma dada função é maior do que outra, embora exista um intervalo onde tal se verifica, eles acabam por considerar apenas o ponto máximo desse intervalo e não o intervalo no seu todo. O outro tipo de interpretação refere-se à confusão que é feita entre o declive e a altura.

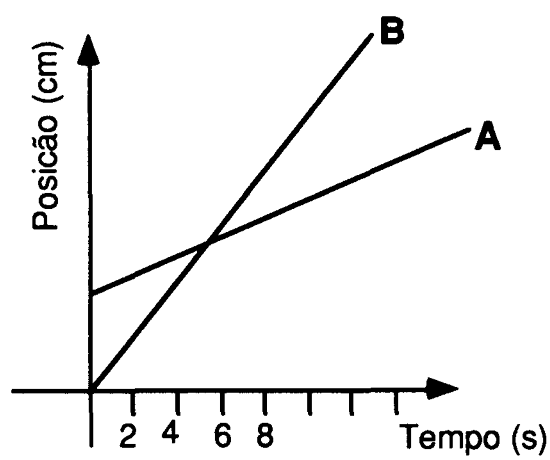


Figura 2.1

Clement, (1989), Monk, (1992) e McDermott et. al (1987, citado por Leinhardt, Zaslavsky e Stein, 1990), a partir de um gráfico semelhante ao da figura 2.1 verificaram que quando era pedido aos alunos para indicarem qual dos objectos *A* ou *B* tinha maior velocidade no instante *t=2*, mais de metade considerou que era o objecto *A*. Este tipo de resposta supõe que os alunos se referem à posição da imagem de *A* relativamente à da *B*, não tendo em atenção que o declive de *A* é menor do que o de *B*.

Leinhardt, Zaslavsky e Stein (1990) utilizam o termo interpretações icónicas para definir aquilo que Tierney, Weinberg e Nemirovsky designam por interpretações pictoriais. São vários os autores que verificaram que os alunos faziam correspondências figurativas entre a representação gráfica e algumas características visuais do problema. Podemos considerar, por exemplo, as entrevistas feitas por Janvier (1978) aos alunos em que tinham que resolver um problema relacionado com um gráfico de velocidade versus distância percorrida por um carro numa pista, e onde se pretendia que os alunos identificassem o número de curvas desta. (Era suposto que o carro diminuisse a velocidade quando descrevia as curvas). Muitos alunos, erradamente, olharam para a oscilação do gráfico e contaram as curvas a partir dessa oscilação.

Os alunos parecem revelar algumas dificuldades ao trabalharem com escalas. Ao interpretarem gráficos, Ponte (1984) identificou três espécies de dificuldades: desatenção às unidades, nas quais a escala estava representada, confusão com as unidades e falta de considerarem subdivisões apropriadas das unidades da escala. Tierney, Weinberg e Nemirovsky (1992) verificaram também inconsistências nas escalas traçadas pelos alunos. Relativamente à variação, os mesmos autores, notaram que eles interpretam diferenças no gradiente sem primeiro terem a certeza se as escalas são as mesmas. Segundo Leinhardt, Zaslavsky e Stein (1990) as escalas requerem particular atenção sobretudo se se trabalha com tecnologias computacionais. O facto de poder ver o gráfico de uma dada função representado, em diferentes escalas, pode criar nos alunos uma "necessidade conceptual" que pode afectar o tipo de imagens mentais que eles estão aptos a construir. Segundo Goldenberg (1988) e Leinhardt, Zaslavsky e Stein (1990) as mudanças nas escalas são uma das principais fontes de ilusão na visualização dos gráficos e podem ser obstáculos no processo de abstracção de gráficos como representações visuais concretas, para gráficos como representações simbólicas.

Na construção de gráficos também foram observadas algumas dificuldades. Ponte (1984) verificou que as principais dificuldades se prendiam com a indecisão acerca do tipo de gráfico, a construção de escalas não uniformes para representar variáveis uniformes e hesitação ou deficiência na escolha das unidades; no entanto, as duas últimas dificuldades eram mais evidentes nos alunos de mais baixa capacidade.

Relativamente à leitura dos gráficos parece não haver grandes dificuldades quando se trata de conjuntos discretos de pontos (Ponte, 1984; Markovits, Eylon e Bruckheimer, 1986). No entanto, há uma certa imprecisão na estimação de valores da função e na determinação das abcissas (Ponte, 1984), pois os alunos parecem não ter grande rigor na projecção mental dos pontos sobre os eixos. Outro tipo de dificuldade foi identificado por Markovits, Eylon e Bruckheimer (1986) e prende-se com o facto de os pontos estarem sobre algum dos eixos criando, assim, dificuldades na determinação de objectos e imagens. Os mesmos autores verificaram ainda que quando as funções eram representadas por um conjunto discreto de pontos havia uma certa dificuldade na sua identificação.

Os alunos mostram alguma dificuldade em representar a variação. Uma das estratégias que eles utilizam é a de ponto-por-ponto (Janvier, 1978; Ponte, 1984) em que mesmo que a variação esteja envolvida num processo contínuo de mudança, eles começam por traçar alguns pontos representantes de estados particulares do processo. Outra forma usual de representar a variação refere-se à linearidade. Muitos alunos tendem a considerar como linear a maior parte das variações. Markovits, Eylon e Bruckheimer (1986), também verificaram que, quando os alunos eram solicitados a darem exemplos de funções, havia uma grande tendência para as funções lineares e ao tentarem unir dois pontos utilizavam sempre segmentos de recta, defendendo que através de dois pontos só pode passar uma linha. Este tipo de raciocínio parece sugerir que os alunos generalizaram a propriedade das funções lineares, em que uma recta é definida por apenas dois pontos. Leinhardt, Zaslavsky e Stein (1990) defendem que a tendência para a linearidade também pode ser explicada pelo facto de a primeira família de funções, que os alunos estudam, serem as funções lineares.

Ao estudar a variação, muitos alunos fazem interpretações pictoriais (Clement, 1989; Janvier, 1978; Ponte, 1984), isto é, fazem uma correspondência figurativa entre o desenho do gráfico e algumas características visuais do problema.

Relativamente às múltiplas representações de uma função parece que o reportório dos alunos comporta, essencialmente, as representações algébrica e gráfica, com especial incidência para a primeira (Markovits, Eylon e Bruckheimer, 1986) e ao fazerem a tradução de umas para as outras há dificuldades sobretudo ao passar da gráfica para a algébrica. Contudo, ambas são influenciadas pelo reportório de funções que os alunos conhecem. Quando as funções são menos familiares, como por exemplo, as funções constantes e as definidas por ramos, a tradução, quer da representação gráfica para a algébrica, quer o inverso são igualmente difíceis (Leinhardt, Zaslavsky e Stein, 1990) e, por vezes, a função constante torna-se mais difícil por "faltar a variável". Ao tentar fazer a passagem da representação algébrica para a gráfica, Goldenberg (1991) verificou que os alunos tinham alguma dificuldade na interpretação das constantes *a*, *b* e *c* da expressão ax^2+bx+c. Assim, eles verificaram que o *a* fixava o sentido da concavidade e o *c* movia a parábola verticalmente, pelo que eles acharam que seria razoável que o *b* deslocasse a parábola horizontalmente. Leinhardt, Zaslavsky e Stein (1990) identificaram alguns obstáculos, "obstáculos conceptuais", que impedem os alunos de compreender as funções quadráticas a partir da resolução de problemas que incidiam na tradução entre as representações gráfica e algébrica. Um primeiro obstáculo referia-se à interpretação da informação gráfica onde os alunos consideravam apenas a parte visível do gráfico da função. Um segundo obstáculo diz respeito à relação entre a função quadrática e a equação quadrática. A correspondência entre a função quadrática da forma $y=ax^2+bx+c$ e a equação quadrática da forma $ax^2+bx+c=0$ com as mesmas raízes que a função, parece ser vista como se houvesse uma correspondência um a um. Entretanto, o que acontece de facto é que a cada equação corresponde um número infinito de diferentes funções quadráticas com as mesmas raízes. O terceiro obstáculo salienta a analogia entre a função quadrática e a função linear, onde o primeiro coeficiente da função quadrática, o coeficiente do x^2, é tratado como sendo o declive de uma recta. Um quarto obstáculo relata a aparente mudança na forma da função quadrática com um parâmetro nulo, considerando o parâmetro que é zero como se ele não tivesse qualquer valor. Neste caso, uma equação da função quadrática, em que um dos parâmetros é zero, parece ser vista como se não fosse um elemento da família $y=ax^2+bx+c$, com $a\neq0$. O último obstáculo menciona a ênfase que é colocada na interpretação dos pontos, sendo a sua leitura feita utilizando apenas uma das coordenadas, por exemplo, quando consideravam o vértice referiam apenas a coordenada referente ao *x* (objecto).

A noção de variável parece, igualmente, trazer algumas dificuldades aos alunos. Rosnick (1982, citado por Ponte, 1985) verificou que os alunos, por vezes, não associam a cada variável um referente bem definido, antes a consideram como representando um estranho conglomerado de significados. Ponte (1984) verificou, igualmente, que os alunos manifestam uma tendência para identificar variável com unidade de medida, tendo dificuldades em identificar variáveis envolvidas em situações de alguma complexidade e confundindo, frequentemente, uma variável com a sua taxa de variação. Goldenberg (1988) verificou que o conceito de variável é difícil de aprender sobretudo quando os alunos utilizam meios computacionais estáticos. Assim, os alunos podem ter dificuldades em compreender o papel das constantes *a*, *b* e *c* da expressão ax^2+bx+c, pois, quando o aluno explora uma família de funções deste tipo o computador atribui, automaticamente, os valores à variável *x* e o aluno apenas tem que dar valores às constantes, passando assim a ser estas que representam a variável para o aluno.

Em Portugal poucas têm sido as investigações que se tem debruçado sobre este assunto. No entanto, Ponte (1985) chegou à conclusão de que muitos dos alunos do 10º ano tinham uma ideia vaga do conceito de função e que os alunos do 11º ano, embora tivessem uma compreensão aceitável do conceito, mostravam algumas dificuldades em o aplicar a situações da vida real. Também concluiu que os alunos tem a ideia de que a Matemática é essencialmente uma manipulação de números e de símbolos dos quais mal se conhecem os significados. Duarte (1991) verificou que a utilização de programa ESTDFUNC teve um efeito positivo na construção e consolidação dos conceitos funcionais, nomeadamente, simetria, zeros, monotonia, concavidades e assímptotas.

9 - Definição de termos

Neste estudo são utilizados determinados termos cujo significado é estabelecido nesta secção.

Concepção estrutural — Uma de duas formas básicas de abordar um conceito matemático abstracto (a outra é chamada concepção operacional), inspirado em Sfard (1989, 1992). A concepção estrutural ocorre quando uma dada noção é concebida como referindo um objecto. No caso das funções pode traduzir-se por um processo que as concebe como um constructo estático, por exemplo um conjunto de pares ordenados.

Concepção operacional — Uma de duas formas básicas de abordar um conceito matemático abstracto (a outra é chamada concepção estrutural), inspirado em Sfard (1989, 1992). A concepção operacional ocorre quando a pessoa vê uma dada noção como referindo um processo em vez de um objecto. No caso das funções pode traduzir-se por um processo que envolve cálculo algébrico.

Introduzir a representação algébrica — refere-se ao acto de digitar, a partir do teclado do computador, a representação algébrica por forma a que seja possível este traçar a respectiva representação gráfica.

Representação algébrica geral da função afim — esta representação refere-se à equação $y=ax+b$, onde a e b representam constantes arbitrárias, x representa a variável independente e y a variável dependente.

Representação algébrica geral da função quadrática — esta representação refere-se à equação $y=ax^2+bx+c$, onde a, b e c representam constantes arbitrárias, x representa a variável independente e y a variável dependente.

Representação algébrica — a representação algébrica refere-se à expressão analítica, $f(x)$, que os alunos introduzem no computador e que é visualizada na forma $y=f(x)$.

Representação gráfica — a representação gráfica refere-se ao gráfico que é traçado no ecrã do computador.

Representação pontual — a representação pontual refere-se a funções que são definidas a partir de pontos particulares, normalmente pontos que se situam sobre os eixos coordenados, e que são apresentados na forma de pares ordenados.

Representação tabular — a representação tabular refere-se à tabela que é formada por duas colunas e onde numa delas é representada a variável independente e na outra as respectivas imagens.

Representação visual — a representação visual refere-se aos gráficos que os alunos invocam através da sua representação mental. Podemos considerar que estamos em presença desta representação quando os alunos referem gráficos, ou propriedades gráficas, com base apenas na representação algébrica ou na pontual.

Tradução — a tradução refere-se ao processo que envolve a transformação de uma representação de função noutra, sendo ambas as formas de representação identificadas com a mesma função.

CAPÍTULO III

METODOLOGIA

Neste capítulo pretende-se descrever e justificar as opções metodológicas que estão subjacentes a esta investigação. Apresentam-se, inicialmente, algumas características da abordagem qualitativa, enquanto metodologia de investigação, referindo-se as razões subjacentes à opção por esta abordagem. Em seguida, indicam-se as principais técnicas de recolha de dados: entrevistas semi-estruturadas, observação de aulas e recolha de artefactos. Finalmente, apresenta-se uma caracterização dos procedimentos do estudo que engloba a observação de aulas, as entrevistas, a recolha de documentos e a composição dos grupos.

1 - Abordagem qualitativa como metodologia de investigação

Neste estudo foi utilizada uma metodologia de natureza qualitativa. Segundo Bogdan e Biklen (1982) a expressão *investigação qualitativa* constitui um termo geral que se refere a várias estratégias de investigação que partilham um certo número de características: os dados recolhidos são ricos em descrições de pessoas, lugares e conversações e não são fáceis de manejar por procedimentos estatísticos; as questões de investigação não são enquadradas por variáveis operacionalizáveis sendo antes formuladas para investigar, em toda a sua complexidade, um dado contexto. Para os mesmos autores quando se conduz uma investigação qualitativa deve ter-se em conta os objectivos para poder definir a direcção na qual os dados devem ser recolhidos, não se devendo abordar a investigação com questões específicas para responder a hipóteses a testar. Deve ter-se em atenção o comportamento dos sujeitos sem os desligar do seu próprio quadro de referência. A recolha de dados deve ser feita através de contactos com as pessoas em cenários onde estas passam o seu tempo.

Para Bogdan e Biklen (1982) há cinco aspectos a ter em conta na investigação qualitativa. O primeiro aspecto refere que a investigação qualitativa é o cenário natural e uma fonte directa de dados onde o investigador é o instrumento chave. Os investigadores escolhem cenários particulares para estudo, porque sentem que a acção pode ser melhor compreendida quando é observada no cenário em que ela se desenrola. O cenário, por sua vez, deve ser compreendido no contexto da história das instituições das quais faz parte. Quando os dados, sobre os quais recai a investigação, são produzidos por sujeitos é importante saber onde, como e em que circunstâncias eles foram obtidos desde o início. A separação do acto, palavra ou gesto do seu contexto significa, para o investigador qualitativo, perder uma parte do significado. Quando os dados são recolhidos com base em gravações de vídeo, entrevistas ou através de observação participante, o investigador deve assumir que o comportamento humano é significativamente influenciado pelo cenário no qual este ocorre.

O segundo aspecto refere que a investigação qualitativa é descritiva. Os dados recolhidos são apresentados na forma de palavras ou narrações. Os resultados escritos da investigação contêm citações que servem para ilustrar e substantivar a apresentação. O corpus inclui sobretudo transcrições de entrevistas, notas de campo, vídeos, documentos pessoais e gravações. Na procura da compreensão, o investigador tenta analisar os dados em toda a sua riqueza e procurando não distorcer a forma como eles foram recolhidos. Na recolha de dados descritivos, o investigador aborda o mundo de uma forma minuciosa assumindo que nada é trivial e que tudo é potencial para desbloquear uma compreensão mais profunda do que está a ser estudado. A descrição é um método de reunir dados onde os detalhes são tidos em conta.

O terceiro aspecto refere que os investigadores qualitativos estão preocupados com o processo em vez de se preocuparem simplesmente com as saídas ou produtos. A ênfase qualitativa nos processos tem sido particularmente benéfica na investigação educacional ao clarificar determinadas predições acerca dos alunos. Por exemplo, a ideia de que a performance cognitiva dos alunos na escola é afectada pelas expectativas dos professores, pode ser analisada por técnicas quantitativas que nos mostram através de pré-testes e pós-testes que mudanças ocorrem ou então recorrer a estratégias qualitativas que nos mostram como as expectativas são alteradas nas actividades diárias, nos procedimentos e interacções (Roshenthal e Jacobson, 1968, citados por Bogdan e Biklen, 1982).

O quarto aspecto refere-se ao facto de os investigadores qualitativos terem uma tendência para analisar os dados por indução. Não descobrem dados ou evidências para provar ou falsificar hipóteses que formularam no início do estudo. Pelo contrário, as abstracções são construídas agrupando em conjuntos os detalhes que têm sido coleccionados. A teoria que se desenvolve desta forma emerge de baixo para cima a partir de várias peças discrepantes, mas que estão interrelacionadas. Constrói-se, assim, uma descrição que toma forma à medida que vão sendo recolhidas e examinadas as partes. O processo de análise dos dados pode ser comparado metaforicamente com um funil onde as coisas são abertas no início e mais dirigidas e específicas no fim.

O quinto aspecto refere que o "significado" é uma preocupação importante para a abordagem qualitativa. Os investigadores qualitativos estão interessados nas diferentes formas que as pessoas utilizam para dar sentido às suas vidas. Estão preocupados com aquilo que Bogdan e Biklen designa por *perspectivas dos participantes*. Quando os investigadores utilizam vídeos, entrevistas ou rascunhos de artigos, acabam por mostrá-los aos participantes por forma a verificar se eles se revêm nas personagens que interpretaram, obtendo assim dados mais representativos.

Dado que os objectivos do estudo tinham por base a identificação e caracterização de processos utilizados pelos alunos ao trabalharem com as diferentes representações de funções e, ao resolverem equações e inequações graficamente, a utilização de uma metodologia de natureza quantitativa não pareceu ser aquela que melhor poderia responder a estas questões. Não se pretendia apenas fazer uma verificação, mas antes conhecer os processos e estratégias que os alunos utilizam na actividade matemática. Tendo em vista estes objectivos e a partir dos pressupostos acima enunciados foi decidido enveredar por uma metodologia de natureza qualitativa. Optou-se por fazer a recolha de dados no cenário mais próximo possível daquele que os alunos vivenciam durante as aulas, tendo o investigador feito um grande número de observações das aulas, por forma a melhor poder compreender a acção dos alunos na situação de aprendizagem. Pretende-se, assim, fazer uma recolha de dados baseada em descrições sendo a principal preocupação a de melhor compreender os processos e as estratégias que os alunos utilizam quando trabalham com diferentes representações de funções e quando fazem a tradução entre elas. A procura do *significado* é uma das preocupações na interpretação dos dados, tendo sempre em vista a compreensão das perspectivas dos participantes. Dado que o estudo não pretende testar hipóteses à partida, a análise dos dados acaba por poder ser enquadrada num processo indutivo.

2 - Técnicas de recolha de dados

A recolha de dados é baseada essencialmente em três técnicas que consistem em entrevistas semi-estruturadas, observação de aulas e recolha selectiva de documentos produzidos pelos alunos. Há, ainda, a salientar as conversas informais que se foram estabelecendo entre o investigador e a professora, que se revelaram frutuosas, como forma de melhor compreender os dados e o contexto educativo. Apresenta-se, de seguida, uma caracterização breve destas técnicas por forma a melhor contextualizar as opções feitas.

Para Ghiglione e Matalon (1970) uma entrevista é uma conversa com um objectivo, um encontro interpessoal que se desenrola num dado quadro e situação social em que estão envolvidos um profissional e um sujeito "naïf" .Segundo Patton (1980) o propósito de fazer entrevistas é, essencialmente, descobrir o que está na mente de alguém, é ter acesso à perspectiva da pessoa que está a ser entrevistada, para obter dela aquilo que nós não podemos observar directamente.

Patton (1980) distingue três tipos de entrevistas: (1) conversa informal, (2) abordagem por um guião, também designada por semi-estruturada e (3) estandardizada. Também Ghiglione e Matalon (1970) apresentam uma caracterização próxima desta, sendo o primeiro tipo de entrevistas designado por não directivas ou livres, o segundo por semi-directivas e o terceiro por directivas ou estandardizadas. Cada um destes três tipos de entrevistas apresenta características próprias. Assim, no caso da conversa informal, as questões emergem do contexto imediato e são colocadas naturalmente, não sendo as palavras ou tópicos pré-determinados. O entrevistador coloca o tema da entrevista que, normalmente, é amplo e ambíguo e as questões são geradas pela interacção entre o entrevistador e o entrevistado. A ambiguidade aparece aqui com um papel importante, pois vai permitir ao entrevistado desenvolver o seu próprio pensamento a propósito de um tema geral que não inclui nenhum quadro de referência particular. Patton (1980) considera que os pontos fortes deste tipo de entrevista se encontram no facto de haver um incremento na saliência e relevância das questões, pois as entrevistas são construídas e emergem das observações. Há, no entanto, o problema da informação recolhida ser menos sistematizada e compreensiva, se certas questões não aparecem "naturalmente", o que torna a organização e análise dos dados mais difícil. Ghiglione e Matalon (1970) propõem que seja utilizado este tipo de entrevista em situações onde se pretenda essencialmente uma exploração e aprofundamento.

No caso abordagem por um guião ou entrevista semi-estruturada, as questões são especificadas à partida, sendo elaborado um esboço onde o entrevistador tem a liberdade de alterar a ordem das questões ao longo da entrevista. Para Patton (1980) as vantagens da utilização deste tipo de entrevistas reside no facto de os dados serem mais compreensivos e a sua recolha mais sistemática em cada um dos entrevistados. As possíveis falhas na recolha dos dados podem ser antecipadas e remediadas. Há que ter em conta que, por vezes, podem ser omitidos tópicos de uma forma não intencional e a flexibilidade do entrevistador pode reduzir substancialmente a comparabilidade das respostas. Para Ghiglione e Matalon (1970) este tipo de entrevistas pode ser usado quando se pretende obter uma verificação e aprofundamento. Neste tipo de entrevista o entrevistador também pode introduzir novas questões. A principal diferença, relativamente à conversa informal, é que enquanto nesta as questões são geradas na interacção entre o entrevistador e o entrevistado, na semi-estruturada há um conjunto pré-determinado de temas sobre os quais se pretende necessariamente recolher informação.

No caso da entrevista estandardizada ou directiva como referem Ghiglione e Matalon (1970), Patton (1980) considera que esta se subdivide em dois tipos: a) estandardizada aberta e b) quantitativa fechada. Em ambos os casos, o autor considera como características básicas o facto de as questões serem determinadas à partida, iguais para todos e colocadas pela mesma ordem, sendo apenas diferenciadas pelo facto de, no primeiro caso, as respostas poderem ser abertas enquanto que no segundo elas são fixas, tendo o entrevistado que optar entre estas respostas fixas. As vantagens da utilização deste tipo de entrevistas relaciona-se com uma maior facilidade na comparabilidade das respostas, reduz os efeitos de enviesamento que pode ser provocado pela presença de vários entrevistadores, permite colocar muitas questões num curto espaço de tempo e facilita a organização e análise dos dados. Há que ter em conta que há pouca flexibilidade na relação do entrevistador com os indivíduos, a naturalidade das respostas dos entrevistados pode ser afectada distorcendo os dados e obriga os entrevistados a ajustarem-se a determinadas categorias. Para Ghiglione e Matalon (1970) este tipo de entrevistas deve ser utilizado quando se pretende obter uma verificação e controlo.

As entrevistas feitas a partir de um guião ou semi-estruturadas foram a principal técnica escolhida para a recolha dos dados nesta investigação. A partir dos objectivos estabelecidos, o investigador dispunha de um determinado número de temas sobre os quais pretendia recolher informação. Essa informação deveria traduzir, da forma mais "natural", as perspectivas e interpretações dos alunos sobre os temas, havendo também a preocupação de obter um conjunto de dados organizados de uma forma mais ou menos sistemática. Como complemento foi, ainda, feita a observação de aulas e a recolha de documentos produzidos pelos alunos.

Segundo Costa (1986) o investigador pode assumir dois tipos de observação: observação directa e observação participante. Para o autor, a observação directa é, por vezes, referida como sendo um conjunto de técnicas de observação visual e auditiva, não envolvendo interacções verbais específicas com o observador e supondo, frequentemente, o anonimato deste. Estas técnicas podem ser, por vezes, muito rigorosas sendo definidas tipologias de classificação das observações de uma forma bem estruturada. Deve, também, ter-se em atenção a exaustividade do sistema de classificação e o facto de as distinções não deverem conduzir a equívocos. Neste tipo de abordagem há que ter em conta o impacto que o investigador vai causar na unidade social em estudo. Para que este impacto seja reduzido é necessário que ele faça parte daquele contexto social ou esteja com ele fortemente familiarizado por socialização ou aproximação prévia.

Para Costa (1986) a observação participante é também uma observação directa, mas num sentido menos restrito do que foi acima referido. Neste caso não se pretende minimizar a interferência que o investigador vai originar. Este tipo de observação caracteriza-se pela frequência, do maior número possível, de locais do contexto social em estudo, pela presença repetida no maior número de actividades de todo o tipo e a permanente conversa com as pessoas que a ele pertencem.

Na recolha de dados para este estudo, o investigador assumiu os dois tipos de observação acima referidos. Nas aulas de trabalho de grupo, realizadas na sala da aula normal ou no computador, foi feita uma observação participante, respondendo o investigador às solicitações dos alunos ou colocando algumas questões acerca de determinadas conjecturas que estes chegavam. Nas aulas realizadas na sala de aula normal, onde não era realizado trabalho de grupo, o investigador fez uma observação directa. Para tal, foi elaborado um guião de observação que permitia registar dados sobre a forma como o currículo foi implementado, sobre a intervenção dos diferentes actores e sobre a forma como estes se relacionavam durante a situação de ensino.

3 - Procedimentos do estudo

3.1 - Contexto geral

O presente estudo foi realizado numa turma do 10º ano de escolaridade de uma escola secundária do distrito de Setúbal, no ano lectivo de 1993/94. A turma era composta por 27 alunos, que na sua maioria, no ano lectivo anterior, já integravam uma turma do 9º ano. Os alunos apresentavam uma média de idades de 16 anos e o seu aproveitamento em Matemática, bem como nas restantes disciplinas, era satisfatório. No 9º ano, estes alunos, ainda estavam integrados na antiga estrutura curricular e é, neste ano, que vai ser generalizada a implementação dos novos programas da reforma currícular. O tema das funções foi introduzido no início do segundo período tendo-se prolongado até praticamente ao final deste. A ordem dos temas propostos nos programas currículares foi alterada, tendo os alunos, até à altura em que foram introduzidas as funções, estudado apenas o tema referente aos números reais. Os temas referentes à Estatística e Geometria Analítica viriam a ser abordados posteriormente.

3.2 - Observação de aulas

A observação das aulas, por parte do investigador, teve por base um duplo objectivo: integrar o investigador no contexto da sala de aula por forma a que a sua influência no enviesamento dos dados fosse minimizada e permitir que este pudesse ter uma visão global e pormenorizada da abordagem feita sobre o tema das funções, por forma a melhor poder compreender os processos e raciocínios desenvolvidos pelos alunos.

Ao longo de 26 aulas, o investigador acabou por realizar dois tipos de observação que Costa (1986) define como sendo observação directa e observação participante. Assim, durante as aulas realizadas no computador e nas aulas de trabalho de grupo desenvolvidas na sala de aula normal, acabou por ser feita uma observação participante. A professora e o investigador circulavam entre os grupos por forma a ajudar estes a ultrapassarem as dificuldades com que se iam deparando, quer na utilização da ferramenta computacional quer na interpretação das representações gráficas obtidas. Este tipo de actividades serviu para criar entre o investigador e os alunos uma certa relação de confiança que se foi alargando ao longo das várias aulas. Esta relação assumia contornos diferentes da estabelecida entre professora e alunos. Eles aproveitaram a presença do investigador para ultrapassar determinadas dificuldades ou confirmar determinadas conjecturas. Noutras situações, eles aproveitavam para discutir as potencialidades do *software* utilizado, comparativamente com outros que já conheciam ou mesmo para discutir métodos de resolução algébrica alternativos aos apresentados na aula ou no manual escolar que lhe permitiam interpretar os gráficos traçados.

Nas aulas que decorreram na sala de aula normal, em que não foi realizado trabalho de grupo, o investigador assumiu uma postura de observador, sentando-se numa das carteiras vagas da parte posterior da sala. Nestas situações pode considerar-se que a observação feita foi do tipo directa, tal como é definida por Costa (1986). Nestas aulas o investigador utilizou uma grelha de observação onde ia registando as intervenções da professora e dos alunos, as actividades desenvolvidas no quadro, o tempo decorrido e comentários que, na altura, pareciam relevantes para melhor compreender os dados recolhidos. Houve, no entanto, algumas situações em que os alunos que se sentavam nas cadeiras adjacentes acabaram por partilhar as suas dificuldades com o investigador, tal como o faziam com os colegas que se sentavam ao seu lado.

Durante a observação das aulas foi possível identificar situações donde é possível inferir alguma influência da própria investigação. O facto de as entrevistas terem decorrido em dois momentos diferentes, como se poderá constatar na secção seguinte, teve alguma interferência na abordagem dos conteúdos seguintes. Assim, aquando do estudo da resolução gráfica de equações e inequações, os elementos de um dos grupos entrevistado, no primeiro momento, utilizaram processos que desenvolveram durante as entrevistas para explicar algumas situações de resolução gráfica de inequações. Eles referiram-se, em especial, ao facto de se poder comparar uma função qualquer com uma função constante onde propõem que se represente graficamente a função constante por uma recta horizontal, podendo, assim, estabelecer uma representação visual que facilita a comparação das duas funções.

3.3 - Entrevistas

As entrevistas constituíram a principal técnica de recolha de dados. Tratou-se de entrevistas semi-estruturadas realizadas a grupos de alunos e em que estes utilizavam o computador e o programa *Funções* (Teodoro, 1989) como ferramenta para obter as representações gráficas das funções que lhes eram pedidas. Nestas entrevistas pretendia-se, essencialmente, que os alunos conseguissem relacionar as diferentes representações de funções (afim e quadrática) por forma a que a interpretação dos gráficos permitisse, aos alunos, estabelecer relações e conjecturas entre essas diferentes representações. As entrevistas tiveram, assim, uma componente icónica forte, mas que se adequou ao tipo de abordagem que os alunos fizeram ao longo das aulas. A duração prevista para cada entrevista era de um tempo lectivo, 50 minutos, tendo algumas delas excedido um pouco essa duração.

Foram entrevistados quatro grupos de alunos sendo cada grupo constituído por dois elementos (ver constituição dos grupos). Optou-se por fazer as entrevistas em grupo, uma vez que, na situação de aprendizagem na sala de aula, também foi a estratégia de trabalho utilizada. Sendo a aprendizagem uma actividade socialmente partilhada e tendo as aulas em computador decorrido num ambiente de grupo, tal como outras actividades da sala de aula, a entrevista em grupo vem proporcionar uma situação mais próxima da que foi experienciada pelos alunos, durante o período de ensino, podendo, assim, obter-se situações de aprendizagem semelhantes às que ocorreram durante as aulas.

Os guiões das entrevistas (Anexo 2) foram elaborados com base nos objectivos estabelecidos para o estudo, com incidência particular nos casos da função afim e quadrática. Na elaboração dos guiões foi tido em conta o tipo de abordagem que os alunos tinham feito nas aulas, sendo algumas das situações colocadas semelhantes às que aí tinham sido desenvolvidas. Há, no entanto, questões que correspondiam a situações novas, não trabalhadas directamente nas aulas e que consistiam, essencialmente, em definir funções que passavam por determinados pontos que se situavam sobre o eixo das abcissas. Dado que, na situação de entrevista, os alunos vão utilizar o computador como ferramenta para produzir as representações gráficas, os guiões das entrevistas apresentam alguma directividade na forma como as questões são apresentadas. Estas questões, colocadas no guião, assumiram o papel de fio condutor das actividades sendo, por vezes, alterada a sua ordem, pelo entrevistador, com base no tipo de respostas dadas pelos alunos.

Durante a situação de entrevista há, por vezes, uma participação do investigador, no sentido de complementar alguns dos raciocínios dos alunos, acabando mesmo por haver lugar à explicação de algumas situações menos claras para estes. Estas intervenções apenas ocorreram quando o investigador considerava ter conseguido compreender o raciocínio dos alunos e antes de levantar uma nova questão. As razões destas intervenções devem-se ao facto de os alunos estarem implicados numa fase de avaliação, relativamente aos conteúdos abordados e havendo a preocupação, por parte do investigador, de evitar que eles considerassem algumas das conjecturas a que chegaram, uma vez que estas nem sempre conduziam a raciocínios correctos. Noutras situações foram os próprios alunos que solicitaram a intervenção do investigador para confirmar as suas conjecturas.

As entrevistas foram realizadas em dois momentos diferentes sendo sempre conduzidas pelo investigador. A primeira foi efectuada, após ter sido feito o estudo da função afim, durante os tempos lectivos que os alunos tinham disponíveis. Dado que os horários escolares estavam muito sobrecarregados só foi possível, nesta primeira fase, entrevistar dois dos quatro grupos participantes, o grupo Gama e o grupo Alfa. Estes mesmos grupos voltaram a ser entrevistados após a conclusão do estudo das funções, já durante o período destinado às férias da Páscoa. Nesta entrevista foi utilizada a parte do guião da segunda entrevista referente à função quadrática e à resolução de equações e inequações. Os grupos Delta e Beta foram entrevistados numa só vez, no período das férias da Páscoa, tendo estas duas entrevistas uma duração de cerca de uma hora e 15 minutos cada. O guião da entrevista destes dois grupos, segunda entrevista, (Anexo 2) apresenta algumas alterações pontuais, por forma a permitir que a entrevista não se tornasse demasiado longa.

Todas as entrevistas foram audiogravadas, sendo, posteriormente, transcritas pelo investigador. Dado que na situação de entrevista havia uma forte componente icónica, os gráficos no ecrã do computador, a par da audiogravação foi também feito um vídeo de cada entrevista sendo filmado, essencialmente, o ecrã do computador. A câmara de vídeo, colocada atrás dos alunos num tripé, era accionada no início da entrevista não havendo a presença de nenhum operador. Na análise dos dados, o vídeo foi utilizado como complemento das transcrições das entrevistas, permitindo ao investigador relembrar determinadas situações em que os alunos utilizam os gráficos para fazer afirmações e gestos que sem os registos de vídeo ficariam incompletas ou seriam difíceis de compreender.

3.4 - Recolha de documentos

Foram recolhidos, essencialmente, dois tipos de documentos: os relatórios elaborados pelos alunos sobre as actividades desenvolvidas em computador e os dois testes de avaliação realizados ao longo do período em que decorreu a investigação.

Os relatórios sobre as actividades desenvolvidas em computador foram elaborados pelos grupos tal como eles se apresentavam nas aulas onde foi utilizado o computador. Estes relatórios dão-nos uma visão da forma como estes grupos interpretaram a função afim e quadrática a partir das suas representações gráficas, pois em cada uma destas situações era a primeira vez que os alunos trabalhavam com estas funções e visualizavam os seus gráficos. Os relatórios são apresentados tendo em consideração o desenvolvimento proposto pela ficha de trabalho que dirigia cada uma destas sessões e apresentam as conclusões a que cada um dos grupos chegou interpretando os gráficos que lhe eram pedidos para representar no computador.

No caso dos testes de avaliação foram tidas em conta, sobretudo, as questões que se relacionavam com o conceito de função, a interpretação e traçado de gráficos e a resolução de equações e inequações quando eram utilizados processos gráficos.

3.5 - Composição dos grupos

De entre os sete grupos, formados no início das actividades pela professora, foram entrevistados quatro pelo investigador. Estes grupos apresentavam alguma heterogeneidade, uma vez que se pretendeu juntar alunos com mais facilidades de aprendizagem e de manipulação do computador com alunos mais fracos, por forma a que o conhecimento pudesse ser partilhado entre todos os elementos do grupo. Embora os grupos fossem constituídos por quatro alunos durante as aulas apenas foram entrevistados dois elementos em cada um deles. Esta opção foi feita com base nas características dos elementos dos grupos, tendo em consideração o seu desempenho na avaliação, a participação nas actividades, o gosto pela utilização do computador, bem como a sua disponibilidade para poder participar nas entrevistas. A partir da observação dos vários grupos, durante as actividades em computador, o investigador e a professora foram identificando quais os grupos e os elementos de cada grupo mais empenhados nas actividades. Estes dados permitiram identificar em cada um dos grupos aqueles elementos que poderiam ser os informantes privilegiados. Para além destes dados, foi também tido em conta o desempenho na avaliação sumativa, considerando-se grupos que não tivessem elementos com muito bom ou muito mau desempenho. Foram assim seleccionados quatro grupos para serem entrevistados, dos quais apenas três puderam, posteriormente, participar. Como alternativa o quarto grupo foi escolhido entre os três restantes, tendo os elementos do grupo apresentado ao longo das aulas algumas dificuldades quer em compreender os objectivos das actividades quer em interpretar convenientemente os gráficos traçados no computador.

A escolha dos elementos, de cada grupo, que iriam participar nas entrevistas foi também feita com base na disponibilidade destes. Dado que as entrevistas foram realizadas em tempos extra lectivos e como alguns dos alunos não residiam na proximidade da escola, apenas participaram os elementos que podiam deslocar-se mais facilmente à escola durante estas horas. Os elementos de cada grupo ofereceram-se voluntariamente para participar, não havendo em caso algum imposições quer da professora quer do investigador.

4 - Limitações do estudo

A metodologia escolhida introduz algumas limitações no estudo.

Uma primeira limitação está relacionada com o tipo de abordagem que foi feita na recolha de dados. O facto de se ter utilizado uma metodologia qualitativa vem limitar a sua generalização. O estudo foi focalizado num dado tipo de ensino desenvolvido por uma professora e um grupo de alunos que têm características próprias. Embora os resultados sejam úteis, na medida em que permitem caracterizar a forma como um determinado tipo de ensino influencia a aprendizagem e destacar as características da própria aprendizagem que com outra abordagem não seria possível analisar com pormenor, a sua generalização requer alguns cuidados devido à grande diversidade de contextos existentes.

Outra limitação está relacionada com as potencialidades do próprio software. Dado que só era possível obter as representações gráficas através da introdução da representação algébrica, a tradução entre as diferentes representações não puderam ser caracterizadas a partir da utilização directa do computador como ferramenta. Numa situação óptima, o utilizador deveria poder aceder a uma representação a partir da introdução de outra qualquer. Na interpretação da representação tabular a forma como era apresentada, em potências de base dez, levou a que os alunos a evitassem optando por outro tipo de estratégias. Além disso, esta representação só é possível obter depois de traçado o gráfico. O facto de o programa não dispor de uma forma prática de determinar as coordenadas dos pontos, também, foi determinante nalgumas das abordagens que os alunos fizeram. Eles consideraram os pontos, por exemplo de intersecção dos gráficos de uma forma global, sem a preocupação de identificar as suas coordenadas com algum rigor o que permitiu que elas fossem, por vezes, referidas em valor absoluto.

CAPÍTULO IV

CONTEXTO EDUCATIVO

Nesta secção pretende-se fazer uma descrição do contexto educativo onde decorreu o estudo. Apresenta-se, inicialmente, uma caracterização dos meios utilizados e das intenções da professora no processo de ensino-aprendizagem, passando-se, posteriormente, a uma descrição sucinta das aulas, com especial incidência na metodologia e nas estratégias utilizadas pela professora.

1 - O meio envolvente, os materiais utilizados e o papel dos participantes

A escola situa-se num meio urbano e é constituída por um espaço físico de edifício único, com três pisos, onde se distribuem as salas de aula. O edifício, embora tenha sido construído para o efeito, é já bastante antigo tal como o equipamento das salas de aula. As aulas relativas ao tema das funções desenrolaram-se em duas salas diferentes. Na sala de aula normal os alunos sentavam-se em carteiras individuais todas elas orientadas para o quadro e para a secretária do professor, situados num plano superior sobre um estrado, e na sala de computadores, antiga sala do Centro Escolar Minerva, os computadores encontravam-se dispostos sobre mesas que se estendiam em "U" ao longo de três das quatro paredes da sala. Nas aulas realizadas na sala de computadores, os alunos foram distribuídos por grupos devido ao reduzido número de computadores existentes, sendo cada grupo formado por quatro elementos com excepção de um que apenas tinha três. A formação dos grupos foi, em parte, estabelecida pela professora havendo o cuidado de colocar, em cada um dos grupos, um elemento que já tivesse trabalhado com o computador. Estes grupos mantiveram-se ao longo do estudo de todo o tema das funções.

Nas aulas leccionadas, na sala de aula normal, foram desenvolvidos genericamente dois tipos de actividades: aulas de trabalho de grupo onde, por vezes, foi utilizada a calculadora gráfica como ferramenta e aulas mais conduzidas pela professora que suscitam, constantemente, a participação dos alunos onde era, geralmente, feita a correcção das fichas de trabalho das aulas de computador e introduzidos e/ou sistematizados os novos conceitos.

Ao longo das aulas onde foi realizado trabalho de grupo, os alunos utilizaram o computador e a calculadora gráfica como ferramenta na resolução de fichas de trabalho, distribuídas pela professora. A ferramenta mais utilizada foi o computador, sendo a calculadora gráfica utilizada apenas em duas aulas.

Os computadores disponíveis eram do tipo PC compatível, de várias marcas, dispondo todos de disco rígido. O *software* utilizado foi o programa *Funções* (Teodoro, 1989). A escolha deste *software* foi efectuada pela professora, tendo em conta que os vários menus estão em português e que o seu manuseamento, mesmo por parte de pessoas inexperientes, é muito fácil. A realização das entrevistas foi feita com base neste mesmo programa por ser aquele que foi utilizado com maior frequência durante as aulas.

O programa é apresentado a partir de um ecrã inicial que se divide em cinco regiões distintas: um menu principal, um espaço para as representações gráficas, um espaço para introduzir as funções, um outro para apresentar os valores da tabela e uma zona onde são dadas instruções de utilização. Todos os comandos, para manipulação dos gráficos, expressões algébricas ou tabelas, são efectuados a partir do menu com o auxílio das teclas com setas. O menu principal permite editar as funções, num máximo de seis, definir o domínio de cada uma delas, traçar os respectivos gráficos, ter acesso à tabela de valores, apagar os gráficos, alterar a escala dos eixos coordenados, ter acesso a outros ficheiros ou a instruções. É, assim, possível introduzir várias funções e sobrepor os respectivos gráficos, não havendo nenhuma indicação icónica que permita estabelecer uma correspondência entre os gráficos e as respectivas expressões algébricas. Embora seja possível ter, ao mesmo tempo, no ecrã do computador as três representações da função, a tabular, a algébrica e a gráfica, o programa só permite obtê-las a partir de uma delas, a representação algébrica. A tabela de valores é apresentada na forma de potências de base dez, não sendo possível ao utilizador proceder à sua alteração directamente. O domínio e o contradomínio são definidos no intervalo [-10, 10] sendo a unidade na escala dos eixos de duas vírgula cinco unidades. A alteração da escala só pode ser feita a partir da alteração do domínio e contradomínio. O utilizador pode, ainda, dispor de algumas opções que complementam o programa. É possível servir-se de um aviso sonoro durante o traçado do gráfico que varia conforme a função é decrescente, constante ou crescente. Outra opção permite trocar os eixos coordenados sem que sejam alteradas as variáveis independente e dependente. Há, ainda, a possibilidade de ampliar o gráfico e a tabela de valores para o tamanho real do ecrã por forma a permitir uma melhor visualização.

A calculadora gráfica utilizada, nalgumas das aulas onde foi desenvolvido trabalho de grupo, era o modelo *TI 82* da *Texas Instruments.* Basicamente esta calculadora permite trabalhar com várias funções, até um máximo de oito. É possível visualizar as três representações, algébrica, gráfica e tabular, a partir da introdução da representação algébrica. O facto de o ecrã apresentar dimensões reduzidas é superado pela possibilidade que a calculadora tem de fazer *zooms* sucessivos, por forma a melhor poder visualizar o gráfico pretendido. Também a tabela de valores é apresentada de forma a permitir uma leitura fácil, sendo a primeira coluna formada pelos valores da variável independente e as restantes pelos valores das variáveis dependentes das várias funções introduzidas. A calculadora apresenta, ainda, a possibilidade de conhecer as coordenadas de qualquer ponto do ecrã, através da deslocação de um cursor que é accionado a partir do teclado. Para além desta possibilidade, é, ainda, possível determinar os pontos de intersecção de duas funções bastando para tal definir o intervalo onde se pretende fazer a pesquisa. Todas as alterações que o utilizador pretenda fazer, a nível de domínio, contradomínio, escalas dos eixos, factores de zoom e incremento da variável independente para gerar os valores da tabela, são facilmente acessíveis a partir de um teclado específico para o efeito.

A professora e o investigador apresentaram papéis distintos nas aulas que decorreram na sala de aula normal, enquanto que nas aulas em computador desempenharam tarefas semelhantes. Assim, nas aulas que decorreram na sala de aula normal, a professora assegura o funcionamento da aula com base em estratégias que privilegiam a participação activa dos alunos no processo de ensino aprendizagem, enquanto que o investigador assume o papel de observador. Nas aulas realizadas em computador quer a professora quer o investigador desempenharam o papel de auxiliar os alunos a ultrapassar dúvidas surgidas com o programa e com o desenvolvimento das actividades.

2 - A professora e as intenções no processo de ensino-aprendizagem

A professora possui como formação de base uma Licenciatura em Matemática Pura, realizando posteriormente o estágio pedagógico. Tem uma experiência de mais de 20 anos de ensino que repartiu por várias actividades, de entre as quais podemos salientar, a orientação de estágios pedagógicos, colaboração no Projecto Minerva, implementação de projectos envolvendo alunos e outros colegas, participação em Encontros Nacionais de Professores de Matemática, etc. Desde cedo manifestou interesse pela utilização dos computadores na sala de aula, considerando que se trata de uma ferramenta que pode ajudar o aluno a "fazer Matemática".

Ao longo do tema das funções a professora apresenta uma abordagem curricular que se enquadra nos objectivos da Reforma Educativa. Os conteúdos são, geralmente, abordados a partir da interpretação de gráficos e diagramas com base em trabalho de grupo, onde os alunos elaboram relatórios que são escritos numa linguagem não formal desenvolvida por eles com base no contexto educativo onde estavam inseridos. Esta abordagem aponta para uma construção dos conceitos elementares, por parte dos alunos, ainda antes da introdução da linguagem formal. A elaboração dos relatórios vem permitir aos alunos, não só uma estruturação dos dados recolhidos da observação dos gráficos como também faz parte de um processo de avaliação. A análise dos relatórios vem ajudar a professora a identificar as dificuldades dos alunos podendo, assim, a cada momento avaliar a compreensão dos conceitos, por parte dos alunos, e alterar se necessário os métodos de ensino.

A par da abordagem intuitiva dos conceitos funcionais acima referida, a professora desenvolve outro tipo de aulas que tem por base dois objectivos: caracterizar os conceitos anteriomente adquiridos dando-lhe uma linguagem mais formal sempre que necessário e acompanhar estes conceitos com o desenvolvimento de processos e técnicas de cálculo algébrico. Em ambos os casos ela considera fundamental a participação dos alunos, pelo que assume o papel de moderadora das intervenções dos alunos que vão tendo uma certa frequência ao longo das várias aulas.

Em resumo, a professora defende uma abordagem intuitiva dos conceitos funcionais, construídos pelos alunos, a partir da visualização e interpretação de gráficos, mas propõe que a parte analítica não seja desvalorizada, devendo os alunos conseguir trabalhar com as representações algébrica e gráfica em simultâneo.

3 - Descrição das aulas

Apresenta-se de seguida uma descrição das aulas com o objectivo de mostrar a forma como o currículo foi implementado, para melhor poder enquadrar a compreensão deste por parte dos alunos. Ao longo das várias aulas foi abordado o conceito de função, a interpretação de gráficos, as funções afim, quadrática e módulo e a resolução de equações e inequações, quer por via gráfica, quer algébrica.

Esta descrição é elaborada, dividindo as aulas em cinco momentos. Cada momento corresponde a um grupo de aulas onde foi abordado um tema. Em cada momento é apresentado um quadro que resume as actividades e estratégias utilizadas ao longo das aulas e posteriormente é feita uma descrição sucinta dessas actividades.

Momento 1 — Aprendizagem na utilização dos meios computacionais para traçado de gráficos, calculadora gráfica e computador (programa Funções).

Aulas	Conteúdos	Desenvolvimento / Estratégias
1ª	Utilização da calculadora gráfica e do computador	- Introdução à calculadora - Traçado de gráficos de funções afins - Traçado de gráficos de funções quadráticas
2ª	Utilização do computador com o programa Funções	- Distribuição dos alunos por grupos - Traçado de gráficos de funções afins - Traçado de gráficos de funções quadráticas - Traçado de gráficos de outros tipos de funções

Figura 4.1

A primeira aula iniciou-se, na sala de aula normal, com a introdução da calculadora gráfica tendo sido distribuída uma calculadora a cada aluno. Com o apoio da professora e do investigador, estes foram traçando gráficos de expressões polinomiais do primeiro e segundo graus. Houve a preocupação de não utilizar as designações "função afim ou função quadrática" para os gráficos traçados. No entanto, alguns alunos afirmam que os gráficos dos polinómios do segundo grau são parábolas e que os do primeiro eram rectas.

A segunda aula decorre na sala onde os alunos dispõem de sete computadores. A professora dispõe os alunos em sete grupos, por forma a que em cada grupo, um dos seus elementos já tenha utilizado o computador. É distribuído a cada grupo uma ficha de trabalho onde se pede para traçar gráficos de várias funções. Para além de polinómios do primeiro e segundo graus aparecem também funções, como por exemplo: $y=\frac{1}{x}$. Após a distribuição da ficha, a professora e o investigador vão circulando entre os vários grupos para ajudar a resolver alguns problemas com a utilização do *software*, bem como as dificuldades de interpretação dos dados obtidos pelos alunos. A professora pede aos alunos para tirarem notas ao longo do trabalho por forma a poder elaborar um relatório.

As principais dificuldades dos alunos têm a ver com a linguagem a utilizar para descrever aquilo que observam. Dado que o programa permite como opção utilizar som durante o traçado do gráfico alguns alunos conseguem falar de crescimento e decrescimento a partir do som que ouvem. A representação gráfica de funções que são definidas por polinómios do primeiro e segundo graus não parece causar quaisquer problemas aos alunos, no entanto, quando se trata da função $y=\frac{1}{x}$ há alguma dificuldade com a sua interpretação. Quando questionados acerca do domínio da expressão algébrica, vários alunos conseguem verificar que o zero não pertence ao domínio, no entanto, isso não parece ser argumento suficiente para o tipo de comportamento que o gráfico sofre no vizinhança de zero. Quando o investigador questiona um dos grupos para saber que tipo de gráfico é que iriam obter com a função $y=5$ eles acham que deveria ser um ponto. Acabam por não dar mais respostas antes de traçar o gráfico. Quando obtêm o gráfico não conseguem arranjar uma justificação para o mesmo, pois ainda não conseguem falar em termos de objectos e imagens, nem sequer lhe foi dada a noção do tipo de correspondência que deve existir entre eles.

Momento 2 — Interpretação de gráficos. Interpretação algébrica de domínios de expressões dignatórias.

Aulas	Conteúdos	Desenvolvimento / Estratégias
3ª e 4ª	Interpretação de gráficos	- Ficha de trabalho sobre interpretação de gráficos - Exercícios do livro de texto
5ª	Domínios: sua interpretação algébrica.	- Resolução de exercícios do livro de texto

Figura 4.2

A terceira aula inicia-se com a correcção da ficha de trabalho, *Funções 2*, que se refere à interpretação de gráficos. A correcção é feita na sala de aula normal, estabelecendo-se um diálogo vertical. Nas três primeiras actividades pretendia-se que os alunos interpretassem os gráficos por forma a fazer corresponder a cada gráfico uma das afirmações que era dada. As opções que a professora considera como sendo as que melhor descrevem os gráficos, nem sempre são as que os alunos escolheram, no entanto, as que os alunos propõem são tidas em conta e discutidas na presença da turma. Dado que os alunos ainda não tinham falado antes da variação (crescimento e decrescimento) de uma função leva-os a utilizar uma linguagem própria, pelo que um aluno quando quer falar de um crescimento uniforme fala em «crescimento estabilizado» e os restantes ajudam a completar a ideia dizendo que o crescimento é proporcional. Quando se pede para explicar como se traduzem os altos e baixos do gráfico, uma vez que ainda não falaram de extremos, uma aluna diz que são picos. Noutra situação, ao falar de um extremo, um aluno considera que o ponto é um máximo por corresponder ao ponto mais alto.

Em seguida, a professora relaciona o crescimento e decrescimento com o som que o computador faz ao traçar os gráficos, mais agudo se a função é crescente e mais grave se a função é decrescente (programa Funções). São utilizadas como exemplo as funções $y=-5x$ e $y=5x$ levando os alunos a concluir que é o coeficiente do x que determina a variação da função. A professora faz um intervalo na correcção da ficha para falar da noção de aplicação ou função que os alunos deram no 7º ano de escolaridade. Quando os questiona para saber o que é uma aplicação não obtém respostas. A professora explica que é uma correspondência entre dois conjuntos, sendo dados como exemplos a correspondência entre os alunos e as carteiras e entre as cadeiras da sala de cinema e as pessoas que assistem ao filme. A professora conclui que esta correspondência é unívoca uma vez que a cada pessoa só corresponde uma cadeira. Posteriomente, os alunos apresentam outras correspondências que também são unívocas. De seguida, a professora escreve dois conjuntos no quadro, *A* (de partida) e *B* (de chegada), e pede aos alunos estabelecerem a correspondência entre eles, que é definida por «o dobro de», e para a representarem num diagrama de Venn. Após terem representado o diagrama da correspondência anterior a professora pergunta o que acontecia se a correspondência fosse ao contrário, ao que alguns alunos respondem que não pode ser porque há pontos que não têm imagem. De seguida, passou-se à correcção da actividade quatro da ficha que estava relacionada com a determinação dos objectos que davam origem a uma dada imagem. Nesta actividade os alunos não apresentaram grandes dificuldades em determinar objectos e imagens a partir da interpretação da representação gráfica.

A quarta aula inicia-se com a interpretação de gráficos apresentados no livro de texto como problemas propostos e onde se pretende identificar quais dos gráficos dados são funções. Como o domínio de alguns dos gráficos dados é constituído por subconjuntos de $\Re$, os alunos têm algumas dificuldades em identificar a correspondência que se estabelece entre os objectos e imagens do gráfico. A noção de correspondência unívoca também parece causar algumas dificuldades pois os alunos continuam a considerar o domínio como se fosse o conjunto $\Re$. A professora explica que o eixo das abcissas e o das ordenadas são conjuntos de pontos e chama aos elementos do primeiro (x) originais ou objectos e aos do segundo (y) transformados ou imagens. A identificação de pontos no gráfico, quando se trata da função característica, levanta algumas dificuldades porque o gráfico não tem uma variação uniforme. A professora acaba por relacionar o facto de nos extremos deste gráfico haver bolas abertas e fechadas com a representação de conjuntos em termos de intervalos de números reais, tema que tinha sido estudado antes, no entanto, ainda continuam a surgir dúvidas na representação de alguns pontos. Quando se pretende interpretar um gráfico que não é função, a professora traça uma recta vertical por forma a que esta encontre o gráfico em mais do que um ponto, mas alguns alunos apresentam dificuldades em distinguir se estão perante uma função quando vários objectos têm a mesma imagem, ou se quando o mesmo objecto tem várias imagens.

Quando se pretende identificar o domínio e contradomínio nos vários gráficos, a professora explica que se deve ler no eixo dos *XX* e dos *YY* respectivamente, mas ao chegar à função característica voltam a surgir dúvidas, pois os alunos têm dificuldade em aceitar que o contradomínio seja constituído por um conjunto discreto de pontos. Também o facto de o domínio e contradomínio de uma recta ser $\Re$ não parece ser bem aceite pelos alunos, pois parecem estar a interpretar o gráfico a partir da representação que lhe é dada pelo computador e calculadora, considerando apenas a parte que é visível no ecrã. Quando se pretende representar o domínio e contradomínio na forma de intervalos, os alunos não têm grandes dificuldades pois o capítulo anterior ao do estudo das funções tinha sido relacionado com os números reais onde eles tinham aprendido este tipo de representação.

A quinta aula decorre na sala de aula normal e consiste no cálculo de domínios de funções definidas pelas suas representações algébricas e são os alunos que vão resolver cada uma das actividades no quadro. As expressões algébricas são compostas por fracções, cujo denominador é composto por polinómios do primeiro e segundo graus em que estes últimos são apresentados como casos notáveis, raízes quadradas e módulos de polinómios do primeiro grau. A interpretação da expressão, quando se trata de uma fracção, levanta alguns problemas a uma aluna, uma vez que para além de considerar que o denominador tem que ser diferente de zero também parece querer operar com o numerador. Quando se trata de casos notáveis, a maior parte dos alunos acaba por não utilizar a factorização da expressão porque a lei do anulamento do produto também suscita algumas dificuldades. Há sempre a preocupação, por parte da professora, em representar o domínio sobre a forma de intervalo e de discutir qual o tipo de condição que cada um deles gera.

Momento 3 — Estudo da função afim

Aulas	Conteúdos	Desenvolvimento / Estratégias
6ª a 9ª	Estudo da função afim	- Ficha de trabalho com utilização do computador - Interpretação das actividades da ficha e correcção das conclusões dos alunos
10ª a 12ª	Traçado e interpretação de gráficos	- Ficha de trabalho com a utilização da calculadora - Interpretação e correcção das conclusões dos alunos

13ª e 14ª	- Interpretação de gráficos e função afim (revisões) - Injectividade	- Resolução de exercícios sobre domínios - Representação gráfica de funções afins

Figura 4.3

A sexta aula decorre na sala de computadores onde os alunos voltam a juntar-se de acordo com os grupos já antes formados. São distribuídas, a cada grupo, duas fichas de trabalho onde se lhes pede para traçarem gráficos de funções afins a partir da representação geral $y=ax+b$. Enquanto vão traçando os gráficos, a professora e o investigador vão circulando entre os vários grupos por forma a ajudar nas dificuldades que vão surgindo. Os alunos começam a traçar os gráficos que lhe são pedidos, no entanto, não tiram notas e passam logo para a actividade seguinte. Mas, entretanto, a professora aconselha-os a tirar notas para o caderno pois vai pedir para que cada grupo apresente um relatório das actividades desenvolvidas. Nalguns grupos surgem dúvidas com a representação $y=ax$ e os alunos não sabem o que se pretende com o a. Esta forma de representar as funções a partir de uma família é a primeira vez que aparece apesar da professora já a ter utilizado na aula e os alunos têm dificuldade na concretização da constante a. Após ultrapassarem esta dificuldade, alguns grupos concretizam as constantes utilizando números fraccionários e raízes quadradas e até números formados pela soma dos anteriores. A análise dos relatórios mostra que, em geral, os objectivos da ficha foram atingidos, embora a linguagem que os alunos utilizaram para descrever os gráficos fosse baseada na linguagem corrente, em virtude de ainda não terem utilizado os termos crescente e decrescente.

A sétima, oitava e nona aulas baseiam-se essencialmente na interpretação dos resultados da ficha que foi utilizada com o computador na aula anterior onde se vão apresentando e discutindoas possíveis soluções com base nas propostas dos alunos e com a ajuda da professora. A expressão $ax+b$ é considerada como sendo uma família de polinómios que os alunos consideram poder representar uma infinidade de polinómios e que a concretização das constantes a e b conduzem a rectas oblíquas ou paralelas ao eixo das abcissas. Quando a professora pergunta porque é que não deu nenhuma recta vertical os alunos justificam dizendo que a correspondência deixava de ser unívoca. A representação algébrica da função definida pela expressão designatória $3x+5$ é escrita no quadro com três aspectos diferentes, $y=3x+5$, $f(x)=3x+5$ e $x \longrightarrow 3x+5$, para que os alunos se familiarizem com as diferentes formas de representar algebricamente a função. A construção do gráfico da função, representada anteriormente, é feita a partir de uma tabela que os alunos constroem com a ajuda da professora e onde os valores de x são chamados objectos e os de y imagens. A noção de crescimento e decrescimento, que até aqui estava relacionada com o som que o computador fazia ao traçar os gráficos, é agora abordada a partir da comparação dos objectos e depois das suas imagens. O ponto de intersecção com o eixo das ordenadas é facilmente identificado pelos alunos, é o b, no entanto, o ponto onde o gráfico corta o eixo das abcissas levanta alguns problemas. Assim, quando a função não tem zeros é identificada com a recta paralela ao eixo das abcissas, mas quando a professora pergunta quando é que ela terá muitos zeros um aluno sugere que é quando o b for zero mas depois verifica que não pode ser, que assim tinha apenas um zero, e depois chega à conclusão que será quando o a também for zero. O estudo do sinal da função é feito a partir do gráfico que está representado no quadro mas também é interpretado algebricamente a partir da resolução das inequações correspondentes. Quando interpretam a função $y=-3$ a professora sugere que não se trata de uma função afim por não ser do tipo $y=ax+b$ mas os alunos sugerem que ela se pode escrever na forma $y=0x+b$. Para fazer a sua representação gráfica a professora sugere que os alunos façam uma tabela que posteriomente os vem ajudar a concluir que o contradomínio da função é apenas o ponto menos três.

Quando se trata de interpretar a representação $y=ax$, com $a \in \Re$, a professora pede aos elementos dos vários grupos para indicarem o que é que todas estas rectas têm em comum e as respostas têm a ver com o facto de todas serem oblíquas, passarem pela origem e atravessarem dois quadrantes. Nenhum grupo salienta o facto de o a poder ser zero, no entanto, alguns alunos conseguem identificar a recta, dizendo que está sobre o eixo das abcissas. Quando se interpreta o tipo de gráficos que são dados pela família de funções $y=ax+3$, alguns dos grupos consideram que o que elas têm em comum tem a ver com o facto de nenhuma passar pela origem, todas se intersectarem no ponto $y=3$ e todas passarem pela ordenada três quando o *x* é zero. Outro tipo de representação, algébrica que era dado para interpretar os gráficos correspondentes, era definida por $y=3x+b$ onde os alunos teriam que concretizar a constante *b*. Todos os grupos chegaram à conclusão que as rectas obtidas eram paralelas entre si, e referem com gestos o tipo de gráfico que se obtém, funções crescentes, mas quando a professora pergunta se não poderiam ter gráficos com a inclinação ao contrário, decrescentes, eles acham que só é possível se se alterar o sinal do coeficiente do *x* para negativo.

As aulas décima a décima segunda são utilizadas para resolver mais uma ficha de trabalho, na sala de aula normal e com o auxílio da calculadora gráfica os alunos vão construindo as gráficos pretendidos no caderno. Esta ficha é composta por problemas que traduzem situações do dia-a-dia e as primeiras dificuldades com que os alunos se deparam estão relacionadas com a identificação das variáveis independente e dependente. As primeiras actividades estão relacionadas com a interpretação de funções lineares e quando os alunos são confrontados com a noção de proporcionalidade directa surgem várias dificuldades que se prendem essencialmente com a sua definição. Depois da professora e o investigador terem explicado, nos vários grupos, quando é que estamos perante uma proporcionalidade directa, quando existe uma razão constante entre o *y* e o *x*, ou seja, $\frac{y}{x} = k$, a maioria dos alunos consegue identificar gráficos que traduzem relações de proporcionalidade directa e até mesmo quando é que uma função afim do tipo $y=ax+b$ pode representar uma proporcionalidade directa, ou seja, quando o *b* é zero. Para a maioria dos alunos a representação gráfica não parece apresentar grandes dificuldades. As principais dificuldades prendem-se com a escolha das variáveis dependente e independente e com a interpretação do enunciado do problema. À medida que os alunos vão acabando de resolver a ficha de trabalho vão passando para a resolução de exercícios do livro, também agora relacionados com a função quadrática, mas apenas para calcular pares de objecto, imagem a paritr da representação algébrica.

A décima terceira e décima quarta aulas são utilizadas para fazer a revisão dos conhecimentos adquiridos por forma a preparar o primeiro momento de avaliação desta unidade. A professora começa por fazer uma revisão da função afim e introduz o conceito de função injectiva com base nesta função, acabando por pedir aos alunos para escreverem que uma função é injectiva quando a objectos diferentes correspondem imagens diferentes. Para testar a definição de injectividade a professora pergunta-lhes alunos o que se passa com a recta horizontal ao que eles respondem que não é injectiva porque objectos diferentes têm a mesma imagem.

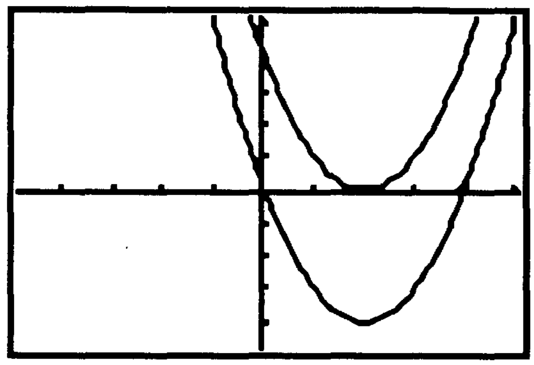


Figura 4.4

Quando se pede para verificar se as parábolas da figura 4.4 são injectivas um aluno diz que é injectiva e não é injectiva. Quando se refere à parábola que tem dois zeros ele parece não ter dúvidas acerca da sua injectividade, utilizando como justificação os zeros, mas quando se trata da parábola que só tem um zero parece haver algumas dificuldades em saber se é ou não injectiva. Posteriormente, outro aluno sugere que não são injectivas porque se pode traçar uma recta paralela ao eixo das abcissas que vai intersectar qualquer das parábolas em mais do que um ponto. Embora este aluno tenha utilizado este tipo de argumento para verificar se uma dada função é injectiva nas actividades que se seguem sempre que a função tem zeros estes são os pontos escolhidos para justificar a existência ou não de injectividade. Outra dúvida, que surge nalguns alunos, prende-se com o facto de nalguns intervalos a função ser injectiva e noutros não, pelo que um aluno tem dúvidas acerca de poder ou não dizer que a função é injectiva apenas num dado intervalo.

A aula continua com a apresentação e esclarecimento das dúvidas dos alunos. As principais dúvidas que surgem relacionam-se com a diferença que existe entre o *a* e o *x* na representação $y=ax$, com a variação da função afim e com a resolução algébrica de inequações para determinar o sinal da função.

Momento 4 — Estudo da função quadrática

Aulas	Conteúdos	Desenvolvimento / Estratégias
15ª a 18ª	- Estudo da função quadrática - Taxa de variação média	- Ficha de trabalho com utilização do computador - Interpretação das actividades da ficha e correcção das conclusões dos alunos
19ª a 22ª	- Inequações do 2º grau - Domínios de expressões designatórias do 2º grau - Função par	- Resolução de exercícios do livro de texto - Interpretação de gráficos e resolução gráfica de inequações - Resolução de uma ficha de trabalho com a utilização da calculadora gráfica

Figura 4.5

A décima quinta aula decorre na sala de computadores onde os alunos formam os mesmos grupos das aulas anteriores e se distribuem pelos computadores disponíveis. São distribuídas fichas de trabalho, *Funções 6*, pelos grupos, bem como folhas para a elaboração dos relatórios onde os alunos já dispunham de um sistema de eixos cartesianos para poder traçar os gráficos obtidos. Para evitar que os alunos traçem gráficos de parábolas que não seja possível visualizar no domínio que é obtido por defeito no computador, as funções a editar são definidas à partida na ficha de trabalho. Os alunos vão traçando os gráficos e registando as conclusões e os respectivos gráficos nas suas folhas de relatório enquanto que a professora e o investigador vão circulando pela sala e ajudando os alunos sempre que estes os solicitam. Na ficha de trabalho começa-se por pedir para traçar gráficos de funções do tipo $y=ax^2$ passando depois na actividade dois para funções do tipo $y=ax^2+c$, na actividade três para funções do tipo $y= ax^2+bx$ e na última actividade são traçadas funções que são polinómios completos de grau dois, ou seja, $y=ax^2+bx+c$. Com esta disposição das actividades pretendia-se que os alunos tirassem conclusões acerca da influência das constantes *a*, *b* e *c* na representação gráfica da função quadrática. Os alunos não apresentam dificuldades no traçado das funções, porém, quando se pede para encontrar o contradomínio, intervalos onde a função é crescente e decrescente e estudar o sinal da função eles deparam-se com algumas dificuldades, cuja origem se prende com a identificação de alguns pontos como o vértice e os zeros.

Nas duas aulas seguintes procedeu-se à correcção da ficha de trabalho que é feita na sala de aula normal e sem o apoio de meios computacionais, utilizando os apontamentos que tiraram para recordar os gráficos traçados e sendo os mesmos traçados no quadro pela professora ou por alunos a pedido desta. A correcção é sempre feita por questionamento dos elementos dos vários grupos por forma a responder às questões que eram colocadas na ficha. Quando a professora pede para justificar o que aconteceria se o *a* da expressão ax^2+bx+c fosse zero, uma aluna diz que ficávamos com uma função afim. A professora recorda que estão perante um polinómio do segundo grau completo e pede aos alunos para se recordarem da fórmula resolvente, $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, que já foi dada no 9º ano salientando mais uma vez o que é o *a*, o *b* e o *c*. representado na fórmula. A função pode ter dois, um ou nenhum zeros, é a conclusão que uma aluna chega e justifica que tal facto depende do que está dentro da raíz. A professora aproveita para explicar que o que está dentro da raíz se vai designar por delta, $\Delta=b^2-4ac$, e que vai passar a chamar-se binómio discriminante.

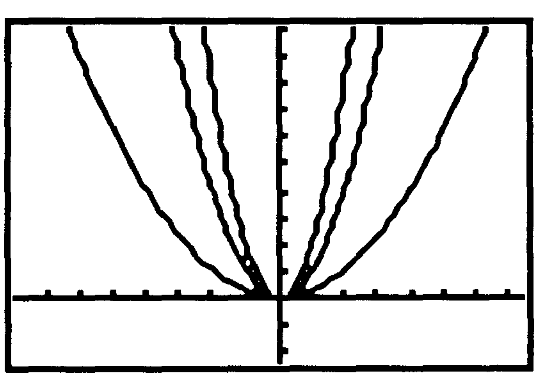


Figura 4.6

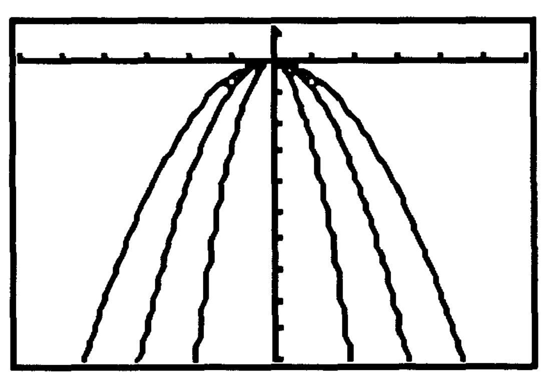


Figura 4.7

Quando se pretende analisar os gráficos obtidos na actividade um, figuras 4.6 e 4.7, a professora começa por traçar no quadro os gráficos correspondentes à figura 4.6 e pede a um aluno que faça a correspondência entre os gráficos e as representações algébricas. O aluno acaba por trocar a função $y=x^2$ com $y=\frac{1}{4}x^2$ mas depois emenda e conclui que quanto maior for o valor de coeficiente do x^2 menor será a abertura da parábola. Quando se trata de saber o que é que todas estas funções têm em comum uma aluna diz que todas tem o mesmo zero, tem a concavidade virada para cima e todas tem o mesmo eixo de simetria. A professora utiliza o mesmo processo de questionamento para o gráfico da figura 4.7 e parece não haver dúvidas na correspondência entre os gráficos e as expressões algébricas. A mesma aluna é também questionada acerca da injectividade ao que ela responde que não são injectivas porque numa parábola a um objecto correspondem duas imagens, mas como a professora não parece concordar com a resposta, ela emenda dizendo que corresponde a uma imagem dois objectos. A Marta acaba assim por justificar a não injectividade a partir de uma correspondência que se estabelece das imagens para os objectos e quando se pergunta como poderiamos verificar graficamente que as parábolas não eram injectivas ela sugere que poderiamos traçar uma recta paralela ao eixo dos *XX*. Quando se trata de indicar o sinal e a monotonia, a maioria dos alunos responde bem, acabando por distinguir os intervalos onde elas são crescentes e decrescentes e a professora apenas tem que intervir para utilizar uma linguagem mais formal e distinguir entre funções crescentes e estritamente crescentes assim como entre funções decrescentes e estritamente decrescentes. Posteriomente, a professora acaba por formalizar a noção de função crescente em sentido lato, escrevendo no quadro que se $x_1 \leq x_2$ então $f(x_1) \leq f(x_2)$, quaisquer que sejam os valores de x_1 e x_2 pertencentes ao domínio da função esta formalização vai sendo construída a partir de gráficos com a interpretação das relações existentes entre os objectos e as imagens.

Nas actividades dois, três e quatro apenas é utilizada uma função para fazer o estudo pretendido. Assim, na actividade dois a função que é utilizada é $y=2x^2-4$. A professora pede para traçar o gráfico e faz notar que há pontos importantes e que não é necessário utilizar a fórmula resolvente para encontrar os zeros do polinómio. Os zeros acabam por ser calculados por resolução da equação $2x^2$-

$4=0$, mas vários alunos têm dúvidas acerca do tipo de números que seriam os zeros antes da resolução algébrica, acabando alguns por sugerir que deveriam ser inteiros ou fraccionários. O vértice é considerado outro ponto importante, mas alguns alunos têm dificuldade em explicar qual é o ponto onde ele se situa e acaba por ser a professora a concluir, em conjunto com alguns deles, que ele está sempre sobre o eixo das ordenadas e que este também é o eixo de simetria da parábola. O sinal da função é representado sobre a forma de intervalo e os alunos apresentam algumas dúvidas quando se trata da sua interpretação algébrica, resolução de inequações, mas a partir da representação gráfica a maioria consegue tirar as conclusões. A monotonia também não apresenta dificuldades para os alunos, bem como a determinação do domínio e contradomínio e a professora aproveita o estudo feito para construir uma tabela de variação da função explicando, aos alunos, que ela serve para arrumar as conclusões do estudo da função. A professora aproveita o estudo que está a fazer para introduzir a noção de taxa de variação média de uma função, explicando aos alunos qual o seu significado e aproveitando os gráficos já traçados para calcular a taxa de variação média nalguns intervalos do domínio das funções. Em dois dos intervalos onde é pedido para os alunos calcularem a taxa de variação média pretendia-se que os alunos relacionassem o valor obtido com o facto de a função ser crescente ou decrescente naquele intervalo, quando a taxa é positiva e negativa respectivamente; as conclusões a que os alunos chegaram tinham a ver com o facto de o intervalo estar antes ou depois dos zeros ou então era relacionado com a função afim.

Na actividade três foi escolhida a função $y=-3x^2+3x$ onde não surgem dificuldades no cálculo dos zeros. Quando se pretende calcular o vértice, um aluno sugere que se calcule o ponto médio entre os zeros e depois se encontre a imagem desse ponto. Após a representação gráfica no quadro, os alunos constroem a tabela de variação da função e a professora aproveita para escolher dois intervalos onde irão calcular a taxa de variação média por forma a poder confirmar a monotonia nesses intervalos.

Na actividade 4, foi escolhida a função $y=-x^2+5x-6$ e depois de determinar os zeros utilizando a fórmula resolvente e o vértice a partir do ponto médio entre os zeros, foi traçado o gráfico e a professora aproveitou para introduzir as noções de máximo, ordenada do véritice, maximizante, e abcissa do vértice. O restante estudo da função já não causa dificuldades aos alunos que facilmente tiram as conclusões. No fim da aula, a professora explica a partir da expressão geral $y=ax^2+bx+c$ como se pode obter algebricamente o vértice da parábola quando esta não tem zeros, chegando à conclusão que este é dado pelo ponto de coordenadas $(-\frac{b}{2a}, f(-\frac{b}{2a}))$.

As aulas dezanove e vinte são utilizadas para resolver inequações do segundo grau e determinar domínios de expressões designatóris que envolvem sobretudo polinómios de segundo grau. A primeira função a ser estudada foi $y=x^2-6x+8$ e logo no início foram considerada algebricamente as inequações que definem quando a função é positiva (>0), não positiva (≤0) e maior que quatro. A professora sugere que se calcule o binómio discriminante para saber quantos zeros é que a função vai ter, mas alguns alunos já não se lembram de como este era constituído pelo que é necessário voltar a explicar. Depois são calculados os zeros e o ponto de intersecção com o eixo dos *YY* que, segundo os alunos, é dado pelo valor de *c* da expressão geral. Depois de ter concluído a representação gráfica, as duas primeiras inequações, definidas anteriormente, são facilmente resolvidas e os resultados apresentados na forma de intervalo de números reais. Quando se pretende saber quando é que a função é maior que quatro, uma aluna sugere que se trace uma recta horizontal a passar pelo ponto de ordenada quatro e depois será para cima dessa recta que estão as soluções da inequação. Este processo é influenciado pelas entrevistas já realizadas com alguns grupos de alunos, conforme foi descrito no capítulo anterior. Após ter resolvido a inequação anterior, ainda foram resolvidas mais duas e posteriormente a professora passou a apresentar esquematicamente no quadro como é que se pode interpretar o sinal de função quadrática em cada uma dos casos em que o $\Delta>0$, $\Delta=0$ e $\Delta<0$ considerando separadamente valores de *a* positivos e negativos. A professora utiliza este esquema de representação como alternativa à representação gráfica rigorosa da função.

Quando se trata de calcular domínios de expressões designatórias que envolvem polinómios de grau dois, os alunos acabam por ser confrontados com a resolução de inequações. Como se pretende que as soluções sejam apresentadas sobre a forma de intervalo de números reais, é na lógica que os alunos têm mais dificuldades, sobretudo quando se pretende passar da conjunção das condições para o intervalo que define o conjunto solução. A professora aconselha-os a utilizarem o esquema de representação na recta que é para não se enganarem e faz com que os que vão ao quadro façam esse esquema e vão explicando à medida que o vão construindo.

Nas duas últimas aulas é proposto aos alunos resolver uma ficha de trabalho, *Funções 7*, onde são apresentados problemas do dia-a-dia relacionados com a função quadrática, a resolução de equações e inequações de segundo grau e onde é abordada a noção de função par e ímpar a partir da interpretação de gráficos. A ficha é resolvida na sala de aula normal, com o auxílio da calculadora gráfica e com os alunos a trabalhar em grupo. Dado que o tempo lectivo não chega para resolver a ficha na sua totalidade, a professora sugere que sejam apenas resolvidas as alíneas que ela indica, ficando as outras para trabalho de casa. Na primeira e segunda actividades a maior parte dos alunos não tem dificuldades em encontrar os valores pretendidos, utilizando a calculadora gráfica para representar graficamente as funções que lhe são dadas e conseguindo utilizar essa representação para responder às questões, no entanto, alguns alunos optam por resolver algebricamente o problema e só depois utilizam a representação gráfica para confirmar o resultado. A terceira actividade, onde são dadas várias funções quadráticas que são definidas por polinómios completos e depois se pede para as escrever na forma de $a(x-h)^2+k$, é aquela onde os alunos apresentam mais dúvidas pois têm dificuldade em compreender o processo algébrico utilizado para poder escrever a função daquela forma. Estas dúvidas parecem surgir quando se pretende que a partir dos dois primeiros termos da função se consiga arranjar um caso notável sem alterar a expressão inicial e também parece haver algumas dificuldades em identificar um caso notável quando o polinónio se não se apresenta factorizado. Na actividade cinco é dada a família de funções $h(x) = 3x^2-5x-k$, com k real, e pretende-se que os alunos encontrem os valores de k por forma que a $h(x)$ obedeça a determinadas condições. Quando, durante a correcção desta actividade, se pretende saber porque é que $h(x)$ é uma família de funções um aluno responde que é porque tem todas o mesmo eixo de simetria e outro acha que é porque tem uma variável, acabando por considerar que k representa uma variável. A professora passa à resolução algébrica, utilizando as condições a que o Δ tem que obedecer, mas alguns alunos têm dúvidas acerca destas condições e acabam por interromper a explicação para colocar as dúvidas. Quando se pede para mostrar que qualquer que seja o valor de k o valor mínimo da função ocorre quando $x=\frac{5}{6}$ uma aluna considera que se deve achar os zeros da função e depois encontrar o ponto médio entre estes para obter assim a abcissa do vértice da parábola. Ela não toma em consideração o facto de que o valor dos zeros vai depender do valor de k, no entanto, outra aluna sugere que se use a fórmula, $x=-\frac{b}{2a}$ para calcular a abcissa do vértice, uma vez que nesta função não se podem determinar os zeros. Na actividade seis, que pede para determinar o domínio de uma função que envolve uma função quadrática e uma função módulo, as dificuldades dos alunos aparecem na resolução algébrica do módulo e na representação do conjunto solução, dado que envolve várias condições. Na última actividade, pretende-se que os alunos completem os gráficos dados, por forma a obter funções pares. Como no enunciado se define função par quando o seu gráfico é simétrico em relação ao eixo dos *YY*, quase todos os alunos conseguem realizar a actividade com sucesso.

Momento 5 — Estudo da função módulo

Aulas	Conteúdos	Desenvolvimento / Estratégias
23ª a 26ª	- Estudo da função módulo - Resolução de inequações com módulos - Funções definidas por ramos	- Ficha de trabalho com utilização da calculadora - Interpretação das actividades da ficha e correcção das conclusões dos alunos - Utilização da função módulo como exemplo de funções definidas por ramos

Figura 4.8

A ficha de trabalho, *Funções 8*, tem por objectivos a interpretação de função módulo e a resolução de equações e inequações com módulos. Os alunos exploraram a ficha, em trabalho de grupo, durante uma parte de uma das aulas, mas não concluíram a ficha, e posteriomente passou-se à sua correcção sendo os gráficos representados no quadro e à medida que a professora vai colocando questões aos elementos dos vários grupos. A professora começa por relembrar que os alunos já tinham trabalhado o módulo no capítulo anterior. Quando se pede para justificar o que representa o módulo de x na recta real, uma aluna diz que representa a distância que o ponto dista da origem. A professora recorre ao livro de texto para que os alunos observem o gráfico da função $y=|x|$ e acaba por discutir a sua representação algébrica, na forma de função definida por ramos, com os alunos. Esta representação levanta algumas dificuldades aos alunos, sobretudo na separação do domínio em subconjuntos, uma vez que no gráfico ele é $\Re$. A professora pede para um aluno traçar, no quadro, o gráfico da actividade 1, $y=3-x$, e depois o seu módulo. Posteriomente, a partir da representação gráfica, é feito o estudo da função $|y|$ que não levanta dificuldades e também é escrita a sua expressão algébrica na forma de função definida por ramos quando se pede para resolver a equação $|y|=4$ uma aluna sugere que se trace uma recta paralela ao eixo dos XX e que passe pela ordenada quatro. A professora explica como fazer geometricamente, com a ajuda dos alunos, depois pede para fazer algebricamente e conclui comparando ambos os resultados. É utilizado o mesmo processo para resolver a inequação $|y|\leq 5$.

Na actividade três é utilizada a função $f(x)=x^2+2x$ para a partir dela definir o seu módulo e resolver equações e inequações. Quando se pede para representar a função graficamente, a professora sugere que há quatro pontos fundamentais para fazer o gráfico, que os alunos vão identificando como sendo os zeros, o vértice e a ordenada na origem. A representação gráfica não causa grandes problemas, sendo o vértice calculado a partir do ponto médio entre os zeros, mas quando se pede para representar o $|f(x)|$ sem utilizar o símbolo de módulo, acaba por ser a professora a definir as expressões algébricas de cada um dos ramos. Como foram definidos três ramos, maior que zero, zero e menor que zero, a Marta não compreende porque é que no ramo do meio aparece zero. Ela está a fazer a comparação com a definição algébrica de $|x|$ onde só foram definidos dois ramos, o maior ou igual a zero e o menor que zero. A resolução das restantes equações e inequações, que eram pedidas na ficha, foram efectuadas algebrica e graficamente e não levantaram problemas, sendo, em grande parte, as conculsões tiradas pelos alunos.

A actividade quatro refere-se à resolução de equações e inequações onde ambos os membros são módulos. Os alunos traçam os gráficos de cada uma dos módulos em separado e depois acabam por resolver algebricamente as equações e inequações. Eles não fazem a resolução gráfica devido à falta de tempo. Quando se pede para traçar um gráfico de uma função definida por ramos onde um dos ramos é definido pelo módulo de uma função afim, uma aluna acha que não se trata do gráfico de uma função módulo, pois o seu aspecto não é o de um *"V"*, isto porque a representação gráfica diz respeito apenas a um subconjunto de $\Re$. A aluna parece ter como protótipo para os gráficos de módulos de funções afins a sua representação na forma de *"V"*. As actividades são encerradas com a entrega e correcção da segunda ficha de avaliação.

A avaliação sumativa que foi feita com base em duas fichas, não previa a utilização do computador ou da calculadora gráfica. Havia, porém, uma componente gráfica nestas fichas, que consistia essencialmente na interpretação de gráficos dados, ou na representação gráfica a partir da respectiva expressão analítica. Na primeira ficha de avaliação, o desempenho dos alunos foi considerado muito bom, cerca de 96% de resultados positivos. Esta ficha dependia em grande parte da construção e interpretação de gráficos. Na segunda ficha de avaliação a média de resultados positivos foi de 60%. O diferencial de notas positivas relativamente à primeira ficha pode ser justificado com base nas questões que envolviam processos algébricos. Na representação e interpretação de gráficos foi onde, de uma forma geral, os alunos revelaram menos dificuldades.

CAPÍTULO V

ANÁLISE DE RESULTADOS

Neste capítulo apresenta-se a análise das entrevistas feitas aos alunos com o objectivo de caracterizar a forma como estes compreendem o conceito de função a partir das suas múltiplas representações. Mais especificamente pretende-se caracterizar o conceito de função dos alunos quando estudam funções envolvendo as suas diferentes representações, conhecer o desempenho ao trabalharem com múltiplas representações e ao fazer a tradução entre elas e caracterizar os processos que utilizam na resolução de equações e inequações a partir da correspondente representação gráfica.

As figuras que aparecem ao longo das várias secções, pretendem representar os gráficos tal como eles eram visualizados pelos alunos, isto é, os gráficos apresentavam sempre algumas irregularidades no seu traçado. Foram no entanto acrescentadas algumas indicações, como por exemplo *f(x)*, *g(x)*, *A*, *B*, etc., para que fosse possível descrever com pormenor os processos e as estratégias utilizadas pelos alunos.

1 - Descrição dos grupos de alunos participantes

Apresenta-se ainda uma descrição dos vários grupos entrevistados por forma a melhor poder compreender a sua dinâmica e o seu envolvimento nas actividades ao longo das entrevistas. Decidiu-se utilizar letras do alfabeto grego como forma de identificar cada um dos grupos enterevenientes. Nesta descrição são por vezes referidas características que resultam dos dados recolhidos ao longo do estudo.

O grupo Alfa

O grupo Alfa é composto pelo Ricardo e pela Susana. Durante a entrevista é o Ricardo quem utiliza o teclado do computador com maior frequência. A Susana é quem primeiro tenta encontrar uma justificação para as questões colocadas, sugerindo ao Ricardo para introduzir as funções e traçar os respectivos gráficos. A Susana parece conseguir interpretar algebrica e graficamente as diferentes funções que vão sendo introduzidas, no entanto algumas vezes parece entrar em conflito quando pretende relacionar as duas representações em simultâneo. Assim, por vezes, após ter sido traçado o gráfico da função ela interpreta mais em pormenor a representação algébrica e acaba por não a relacionar com o gráfico que o Ricardo entretanto já traçou. Este procedimento leva-a a considerar que a função apresenta características que ela não identifica no gráfico que está no ecrã do computador. O Ricardo tem uma participação mais moderada, intervindo apenas para complementar algumas ideias ou para explicar determinadas situações que a Susana tem dificuldades em explicar. Na interpretação das representações algébrica e gráfica ele parece conseguir relacioná-las sem gerar conflitos entre ambas, preferindo no entanto responder a partir da interpretação dos gráficos traçados. No geral o grupo parece conseguir interpretar quer a representação algébrica quer a gráfica, não apresentando uma preferência explícita por uma delas em detrimento da outra.

O grupo Beta

O grupo Beta é composto pelo Rui e pela Ana. Neste grupo é o Rui que utiliza o computador, sendo a Ana que assume uma certa liderança no grupo. A ligação entre as representações algébrica e gráfica não é espontânea, e é com base na representação algébrica que a Ana faz a maior parte das deduções. Por vezes a Ana parece ter alguma dificuldade em estabelecer relações entre as duas representações acabando por recorrer à resolução algébrica como forma de verificação. A interpretação dos gráficos traçados é utilizada como uma forma de verificação de que as expressões algébricas representam as funções pretendidas.

No geral ambos os elementos do grupo apresentam uma preferência pela representação algébrica e consideram que os gráficos são uma forma de confirmar se essa representação é ou não a função pretendida. No entanto a própria representação algébrica também causa algumas dificuldades, conseguindo por vezes representar uma dada família de funções e apresentando algumas dificuldades em definir alguns elementos dessa mesma família.

O grupo Gama

O grupo Gama é composto pelo João e pela Marta. Ao longo das entrevistas utilizam o computador alternadamente para introduzir as funções e traçar os respectivos gráficos. A Marta assume o papel de líder do grupo, sendo ela que intervém quase sempre em primeiro lugar. Ela parece conseguir interpretar simultaneamente a representação algébrica e gráfica, preferindo no entanto em situações concretas que lhe são familiares recorrer à representação algébrica. Quando se trata de actividades que envolvem situações menos familiares ela acaba por recorrer à representação gráfica, como forma de testar se as funções obedecem às condições pedidas, e caso isso não aconteça acaba por utilizar essa representação gráfica para a partir dela definir outras. O João tem por vezes dificuldade em acompanhar os raciocínios desenvolvidos pela Marta, pelo que intervém com menor frequência e em situações onde a Marta experimenta algumas dificuldades. As suas intervenções assumem um papel mais activo nos casos em que a Marta não tem uma intervenção imediata, revelando no entanto a capacidade de relacionar as representações algébrica e gráfica em situações que não são familiares. De uma forma geral o representação algébrica continua a ter um papel preponderante e a gráfica é encarada como desempenhando o papel de confirmação e verificação para as operações realizadas sobre a anterior.

O grupo Delta

O grupo Delta é composto pelo Bruno e pela Joana. É o Bruno que utiliza sempre o computador, pois tem uma grande facilidade quer em manipular o programa, quer mesmo na utilização do sistema operativo, ou programação em Basic. O grupo apresenta assim uma dinâmica diferente relativamente aos anteriores. Quando uma questão é colocada, o Bruno introduz imediatamente a expressão analítica que julga representar a função pretendida e traça o respectivo gráfico. Quando a expressão introduzida não representa o gráfico pretendido ele faz rapidamente a alteração dessa expressão por forma a alterar a representação gráfica. Neste processo utiliza quase sempre a primeira expressão como base para proceder às alterações que permitam chegar ao gráfico pedido. Com a interacção dinâmica que es estabelece entre o Bruno e o computador, ele parece conseguir relacionar as representações algébrica e gráfica sobretudo se se trata de situações familiares. Em situações que são menos familiares, o processo de abordagem é o mesmo, no entanto algumas vezes torna-se mais demorado. O Bruno parece também considerar que deve ser possível de representar no computador todo o tipo de gráficos, pelo que em determinadas situações acaba por recorrer a expressões analíticas que ainda não foram abordadas em termos gráficos para definir funções. Como o processo que o Bruno utiliza é difícil de acompanhar pela Joana, ela acaba por fazer uma interpretação mais algébrica que vai relacionando com os gráficos que ele vai traçando. Este processo permite-lhe ter alguma intervenção, na interpretação dos gráficos que o Bruno traça, acabando por basear essa intervenção na comparação de ambas as representações. De uma forma global os elementos do grupo conseguem relacionar ambas as representações No entanto o processo mais utilizado é o de tentativa e erro com base nos gráficos traçados.

2 - Caracterização do conceito de função pelos alunos

Nesta secção caracterizar-se-á a forma como os alunos interpretam o conceito de função. Foi abordado, em particular, o problema da existência de gráficos que podem ou não representar funções, bem como quais as condições a que eles têm que obedecer para que se possa considerar que estamos perante uma função. Após a análise dos dados foi constatado que as principais verbalizações que os alunos utilizam quando pretendem justificar o que é uma função estão associadas a correspondências ou fórmulas. A noção de correspondência refere-se, essencialmente, a relações que se estabelecem entre os elementos de dois conjuntos, designadas, na maior parte das vezes, por objectos e imagens. A fórmula é um agrupamento de signos e surge associada a um processo de transformação dos objectos em imagens ou como a forma de obter uma representação gráfica no computador. Vejamos mais em detalhe.

Quando é pedido ao grupo Alfa para explicar o que é para eles uma função, a Susana fala da correspondência entre dois conjuntos, um representa os objectos e o outro as imagens:

> [Uma função é] uma correspondência entre um conjunto de objectos e um conjunto de imagens.

A Susana procura uma certa regularidade na forma como se estabelece essa correspondência entre os dois conjuntos. Assim, quando lhe é perguntado se a correspondência entre os objectos e as imagens pode ser uma qualquer, ela acha que "tem que ser a mesma de objecto para objecto" e quando o Ricardo, do mesmo grupo, acrescenta que essa correspondência tem que ser unívoca, ela concorda. Embora a Susana não tenha referido expontaneamente, nesta situação, a correspondência unívoca, noutro contexto, traçar no computador rectas que passam pela origem, ela utiliza a univocidade quando pretende justificar que a recta vertical deixa de ser função:

> Pois, não há função, porque a um objecto corresponde mais do que uma imagem, ... àquele objecto que era o zero [indica o ponto (0,0) no gráfico do ecrã do computador] correspondia uma infinidade de imagens.

Ela utiliza a não univocidade da correspondência que se estabelecia como forma de justificação. A noção correspondência unívoca também está presente quando se pede para representar uma parábola que passe pelos pontos de coordenadas (0,-3) e (0,2). A Susana parece utilizar uma representação visual, a partir da identificação dos pontos no sistema de eixos coordenados, argumentando que "conseguimos [traçar o gráfico]. É assim... de lado [simula, com o dedo no ecrã do computador, o gráfico da figura 5.1]" e conclui que essa parábola não é função porque: "ao mesmo objecto correspondem duas imagens".

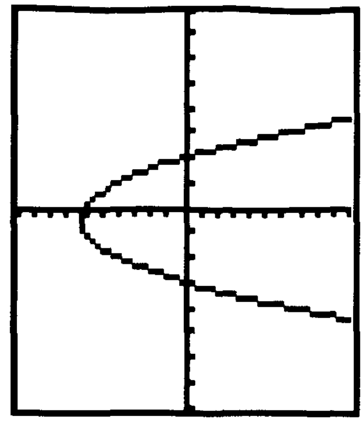


Figura 5.1

A Susana admite assim a possibilidade da existência de gráficos que não representam funções e, na sequência do gesto da Susana, o Ricardo sugere que para podermos ter uma função teríamos que alterar os eixos:

R- [Para ser uma função] alterava os eixos, não?

Ent- (...) Diz, eu não percebi o que é que tu disseste?

R- Era talvez trabalhar com os eixos ao contrário (...) Púnhamos o *y* em função do *x*.

Ent- O *y* em função do *x*, ou seja, o *y* passava a ser o quê?

S,R- Variável independente.

O Ricardo parece conseguir compreender a representação gráfica que a Susana simulou por forma a estabelecer uma representação que defina uma função. Ele associa as variáveis *x* e *y* aos eixos coordenados e embora, momentaneamente, não exprima correctamente a relação funcional que deve ser estabelecida, consegue definir o estatuto das novas variáveis. A forma como se estabelece a relação entre as variáveis não é unívoca e o Ricardo consegue definir uma estratégia que lhe permite transformar a representação numa função.

Tendo-se chegado à conclusão de que a correspondência entre os objectos e as imagens tinha que ser unívoca para que pudesse representar uma função, pretendia-se saber se a correspondência inversa, ou seja do conjunto das imagens para o conjunto dos objectos, também tinha que ser unívoca. A Susana acha que não:

Não podem corresponder... aaa ... podem corresponder vários objectos. Ai não, várias imagens ao mesmo objecto; não... é ao contrário disso. Portanto podem corresponder a mesma imagem a diferentes objectos.

Apesar da interpretação da correspondência inversa parecer causar algumas hesitações, a Susana acha que esta não tem que ser necessariamente unívoca.

Para além da noção de correspondência como forma de abordar o conceito de função a Susana também associa o conceito à existência de uma fórmula:

> Tem que haver uma fórmula para nos dar ... por exemplo, o valor da imagem em função do valor do objecto. Qualquer que seja o objecto, a gente aplica e dá-nos uma imagem.

A Susana utiliza a fórmula para dinamicamente transformar os objectos em imagens.

Em resumo, a Susana acha que as funções envolvem determinados elementos que são designados por objectos e imagens e que estes se associam em conjuntos. A correspondência entre os elementos deve ter uma certa regularidade e deve ser unívoca quando se estabelece do conjunto dos objectos para o das iamgens. No caso da correspondência inversa a univocidade já não é requerida. A Susana admite a existência de entidades matemáticas como o gráfico mas que não são funções. As funções podem, também, ser representadas por uma fórmula que vai permitir transformar os objectos em imagens. Apesar de não se ter conseguido caracterizar o conceito de função do Ricardo, ficou claro que em relação à univocidade ele consegue visualizar a tranformação que permite obter uma função, a partir de um gráfico dado.

No grupo Beta, a Ana também refere que tem que haver uma correspondência entre "valores" de x e de y:

> Função é quando a valores de x corresponde uma e só uma imagem de y (...) ou a um conjunto que seja o independente só pode corresponder um só elemento de outro conjunto que é o dependente.

A Ana evidencia a noção de correspondência, mas faz notar que esta não pode ser arbitrária. A cada elemento do primeiro conjunto só pode corresponder um elemento do segundo, isto é, a correspondência tem que ser unívoca. Parece também estar implícita a associação entre o x e a variável independente e o y e a variável dependente. Quando o grupo Beta é questionado sobre se uma recta vertical é uma função, ela responde que:

> Não, porque deixava... Acho que deixava de ser função, porque a um objecto correspondiam várias imagens.

Para além da designação anterior, a Ana também considera as designações de objecto e imagem quando fala dos elementos dos conjuntos e utiliza o requisito de univocidade da correspondência correctamente.

Quando se pretende saber se a cada elemento do segundo conjunto só pode corresponder um elemento do primeiro, a Ana acha que tal não tem que acontecer necessariamente: "não. [A função] pode ser ou não injectiva". A Ana utiliza aqui a noção de injectividade para justificar que esta correspondência pode ser ou não unívoca. A noção de correspondência inversa parece estar associada com a de injectividade.

Para além da noção de correspondência, a Ana também consegue utilizar argumentos gráficos na interpretação do conceito de função. Assim, quando pretende representar uma parábola que tem dois pontos sobre o eixo das ordenadas, ela considera que não se está perante uma função:

A- Acho que não é possível.

Ent- Porquê?

A- Porque deixaria de ser função, não é?

Ent- Como é que ficava a parábola?

A- Ficava assim com o vértice... Ficava assim, isto é o eixo não é... Acho que ficava assim, [simula no papel um gráfico como o da figura 5.1]. Isto era o ponto menos três e este era o dois [indica no papel os pontos onde o gráfico corta o eixo dos *YY*].

A Ana admite assim que possam existir gráficos que não representam funções. Ela parece ter uma representação visual duma parábola que passa pelos pontos dados conseguindo fazer a sua representação gráfica através de um esboço no papel, mas considerando que esta não representa uma função.

Em resumo, a Ana utiliza várias formas de designar os elementos dos dois conjuntos que estão presentes quando se define uma função. Assim, ela designa esses elementos por objectos e imagens e x e y ou de uma forma mais global por "conjunto independente" e "conjunto dependente". Estes elementos dos dois conjuntos também aparecem referidos como "valores", o que parece pressupor que ela considera que as funções estão definidas entre conjuntos numéricos. A correspondência entre os elementos dos dois conjuntos tem que ser unívoca quando se estabelece do conjunto dos objectos para o das imagens. Ao considerar que a correspondência inversa não tem que ser unívoca, a Ana parece revelar uma visão razoavelmente sólida, pois utiliza como argumento o facto de que a função pode ser ou não injectiva. A Ana também admite a existência de entidades matemáticas, como os gráficos, que não representam funções.

No grupo Gama, a Marta também recorre à noção de correspondência quando pretende justificar o que é uma função. Ela acha que tem que haver "uma correspondência de um conjunto de números a outro conjunto de números". Estes dois conjuntos não são identificados e a Marta não define as características desta correspondência. Embora ela considere que esta correspondência não pode ser arbitrária porque "tem que ser uma correspondência unívoca", acaba por justificar tal facto afirmando que "ao primeiro conjunto de números tem que corresponder um só número do outro conjunto", concluindo posteriormente, após alguma elaboração, que "a um objecto só pode corresponder uma imagem". Já anteriormente, quando foi pedido ao grupo Gama para dizer quantas funções se podem obter a partir da representação algébrica $y=ax+b$ ela responde que:

> Hum... todas as que nós quisermos, menos rectas verticais. (...) Porque senão não é uma função. Porque a um objecto tem que corresponder imagens diferentes. Não, porque a um objecto só pode corresponder uma imagem.

A justificação de que a recta vertical não é função aparece associada com a noção de que a correspondência não é unívoca. Embora a forma como a correspondência tem que ser estabelecida pareça causar algumas dificuldades, a Marta acaba por a definir correctamente.

Já quanto à correspondência inversa a Marta parece não ter dúvidas que esta não tem que ser unívoca: "não, várias imagens já podem corres... Portanto a mesma imagem já pode corresponder a vários objectos".

Outra forma que a Marta utiliza para verbalizar o conceito de função refere-se à existência de uma fórmula: "uma expressão que... se pode representar num gráfico de eixos coordenados". A Marta parece recorrer à fórmula como forma de obter uma representação gráfica, mas a sua interpretação é global não evidenciando os processos que levam a passar de uma representação para a outra.

A Marta também admite a existência de gráficos que não representam funções. Assim, quando se trata de representar uma parábola que tem dois pontos sobre o eixo das ordenadas, ela identifica os pontos correctamente no sistema de eixos, mas considera que só é possível representar a parábola se "invertessemos os eixos". Ela parece considerar que há gráficos que não definem funções e consegue visualizar uma outra representação gráfica que define uma função por alteração dos eixos. Ela justifica a existência dessa representação associando os eixos coordenados às variáveis, admitindo que a variável independente passava a ser o *y* e a dependente o *x*.

Em resumo, a Marta para caracterizar uma função admite a existência de dois conjuntos. Estes conjuntos são constituídos por números o que leva a pressupor que ela considera primordialmente funções numéricas. Os elementos destes dois conjuntos são designados por objectos e imagens. Dos elementos do primeiro conjunto para os do segundo estabelece-se uma correspondência que a Marta considera que tem que ser unívoca. Para ela a correspondência inversa não necessita de ser unívoca. A univocidade também é utilizada pela Marta quando pretende caracterizar determinados gráficos que não definem funções. Ela consegue utilizar argumentos gráficos por forma a transformar esses gráficos em representações de funções. A Marta admite também que uma função pode ser representada por uma fórmula. Esta fórmula aparece associada a uma tradução, pois é encarada como uma expressão que permite obter uma dada representação gráfica.

No grupo Delta, a Joana e o Bruno consideram que para estar definida uma função tem que haver dois conjuntos bem como uma correspondência entre eles:

J- Tem que haver uma correspondência.

B- Tem que haver sempre dois conjuntos.

Ent- E essa correspondência tem que ser o quê?

J- Tem que ser unívoca (...) a um objecto corresponde só uma imagem.

B- Uma imagem [em tom de dúvida],... pois, tem só uma imagem.

Os elementos dos conjuntos não são nunca referenciados de forma explícita, no entanto, parecem ser considerados como os objectos e as imagens. A univocidade da correspondência, embora não tenha sido referenciada logo no início, é explicitada depois de forma clara. Quando se pede para representar uma parábola que passe pelos pontos de coordenadas (0,-3) e (0,2), figura 5.1, a Joana utiliza a univocidade como forma de justificar que essa representação não pode ser função "não [é função porque] duas imagens ... duas imagens não podem resultar do mesmo objecto". Parece também estar implícita a noção de que os objectos são "transformados" em imagens, o que leva a subentender uma certa operação sobre estes.

Quanto ao facto de a correspondência inversa também ter que ser unívoca eles acham que tal facto não tem que ocorrer:

J- Sim,... uma imagem pode ter mais...

B- Pode ter mais objectos.

J- Um objecto é que não pode ter mais do que uma imagem.

Também aqui a arbitrariedade da correspondência inversa parece causar algumas dificuldades pelo que preferem justificá-la pela afirmação recíproca, ou seja, "um objecto é que não pode ter mais do que uma imagem".

Embora a Joana, anteriormente, tenha considerado que uma parábola que passe pelos pontos de coordenadas (0,-3) e (0,2) não define uma função, o Bruno procura arranjar argumentos gráficos para poder definir uma função que passe por esses pontos:

Ent- Onde é que estão os pontos?

B- (0,2) está aqui. Tinha que ser assim [simula uma recta coincidente com o eixo dos *YY*].

Ent- Como é que fica uma parábola a passar nesses pontos?

J- [Bruno], podes ver se dá com x^2?

B- Não dá.

Ent- O Bruno está aqui a dizer que não dá. Não dá porquê?

B- Tinha que ser uma recta para passar aqui, para passar de dois a menos três .

Ent- Uma parábola para passar aí como é que ela ficava?

B- Tinha que ser uma recta.

Ent- Sim. Mas será que uma recta também dá para passar nesses pontos?

B- Ah! Pois não. Ficava vertical.

O Bruno parece estar a utilizar como representação visual as parábolas que têm como eixo de simetria uma recta paralela ao eixo das ordenadas e supõe que, neste caso, apenas pode traçar uma recta. Ele parece não estar preocupado com o facto de obter gráficos que podem não ser funções, pois considera que pode obter como gráfico uma recta vertical. No entanto o facto de a recta vertical não definir uma função parece ser posteriormente utilizado como razão para abandonar esta representação. Ele parece admitir a existência de gráficos que não representam funções, com base na interpretação gráfica, mas tenta encontrar um gráfico que possa ser representado no computador. A ideia da parábola que tem como eixo de simetria uma recta paralela ao eixo dos *YY* continua a prevalecer no Bruno quando simula gestualmente, no ecrã do computador, uma parábola com a concavidade virada para cima, o vértice no ponto de coordenadas (0,-3) e a passar no ponto de coordenadas (0,2), o que lhe daria uma abertura nula e portanto se resumiria a uma parte do eixo dos *YY*. Concordando com a intervenção do entrevistador ele acaba por afirmar que "tinha que ser assim [indica gestualmente uma semirecta no ecrã do computador] só que não dava. É a recta e aí não podia ser". Ele continua a procurar uma representação para a possível parábola utilizando as diferentes funções abordadas, sugerindo que "o módulo talvez [desse]", mas a Joana argumenta que não iria passar no ponto (0,-3). O Bruno parece procurar entre as várias funções estudadas uma que seja possível representar no computador e que passe pelos pontos dados, pois quando é confrontado com a hipótese de haver uma parábola que se posicione como a da figura 5.1, ele argumenta que "não dá, isso aqui [no computador] não dá para fazer".

Em resumo, a Joana e o Bruno caracterizam uma função a partir da existência de dois conjuntos e de uma correspondência entre eles. Os elementos dos conjuntos são designados por objectos e imagens. A correspondência que se estabelece do conjunto dos objectos para o das imagens tem que ser unívoca. A correspondência inversa da anterior pode ser ou não unívoca. O Bruno parece ter uma representação visual forte do gráfico de uma parábola, que o leva a idealizar alguns gráficos de parábolas. Ele parece apenas admitir como representações gráficas aquelas que são possíveis de fazer em computador.

3 - Diferentes representações

Nesta secção será abordada a forma como os diferentes grupos utilizam a representação algébrica e gráfica quando estudam funções com base na utilização do computador. As funções com que os alunos trabalharam, e que faziam parte do currículo implementado, referiam-se, essencialmente, à função afim e à função quadrática sendo, por vezes, trabalhada a representação da função módulo destas.

Uma outra representação, que é muito pouco utilizada pelos alunos quer ao longo das aulas quer das entrevistas, é a *representação tabular*. Embora o computador permita o acesso a uma tabela de valores que relaciona a variável independente com a dependente (Anexo 3) raramente os alunos a consultam para conhecer estados particulares do processo acabando por recorrer à resolução algébrica. Tal facto parece estar relacionado com a forma como os valores da tabela são apresentados, em potências de base dez.

3.1 - A representação algébrica

3.1.1 - A representação algébrica da função afim

As representações algébricas de funções afins foram geralmente apresentadas na forma de equações de expressão geral $y=ax+b$. Procurou-se caracterizar a utilização desta representação, por parte dos alunos, por forma a identificar como são interpretadas a variável independente x e as constantes a e b, bem como qual é o papel destas constantes na descrição das propriedades de funções. São também identificadas algumas características de raciocínio mais avançado onde os alunos utilizam a representação algébrica de famílias de funções.

Quando se pede ao grupo Alfa para verificar se há diferenças entre as representações $y=ax+b$, $y= gx+d$ e $y=a+hx$, o Ricardo argumenta que:

> Não sei se mudar as letras tem alguma influência, e dado que a adição é comutativa pode estar $ax+b$ ou $b+ax$.

Ele parece concordar que não há diferenças entre estas três representações, justificando, tal facto, com o recurso às propriedades da adição. A Susana, no entanto, não está de acordo, pois acha que as "letras" têm significados, porque letras diferentes parecem representar números diferentes e depois associa a cada uma das constantes o seu significado na respectiva representação gráfica:

> Não, eu acho que não, porque o b neste caso... Estas letras tem significados. Porque o b é a... é a ... ordenada, é a ordenada na origem. Por isso acho que não se pode mudar.

(...) Então aqui é o *g* que está a multiplicar pelo x. Ali é o *h*. E o *g* e o *h* são números diferentes.

Quando se pretende fazer uma análise mais pormenorizada da influência das constantes e do papel da variável independente *x* , o Ricardo acha que a equação *y=ax+b* pode representar uma infinidade de funções, uma vez que os valores de *a* e de *b* podem ser arbitrários. No entanto, ele salienta que quando estas constantes são concretizadas passamos a ter uma única recta:

> Essa [*y=ax+b*] pode representar as [rectas] que a gente quiser, porque o *a* e o *b* podem tomar valores reais sempre. Agora se nós definirmos o *a* e o *b,* essa expressão representa uma recta só... Agora como está, pode representar as que nós quisermos.

Parece ser assim feita uma separação nítida na forma como são interpretadas as constantes e a variável na expressão algébrica. A Susana parece não ter uma opinião tão esclarecida acerca desta distinção. Para ela as constantes e a variável servem para atribuir valores: "portanto ... damos valores ao *x* e valores ao *a*... e ao *b*". O *x* é posteriormente identificado como sendo a variável à qual "nós vamos dando valores... portanto... quaisquer, que nós, que a gente ache interessantes". Para a Susana as constantes e a variável parecem ter o mesmo valor representacional, servindo todas para atribuir valores. Quando se pretende analisar qual é a influência de *a*, coeficiente de *x*, o Ricardo acha que está relacionado com a inclinação da recta: "se o *a* aumenta... quer dizer... fica mais junto ao eixo dos *YY*". O Ricardo parece estar a dar a resposta a partir de algumas representações gráficas que tinham sido traçadas no computador e em que os valores do coeficiente de *x* eram todos positivos. Quando eles são confrontados com o facto de o *a* ser negativo traçam o gráfico da função *y=-x* e a Susana conclui que a recta vai ser decrescente: "a recta vai ser decrescente, portanto o valor do coeficiente do *x*, o *a*, vai influenciar no domínio da função". O caso em que o *a* é zero, com o *b* também nulo, é interpretado pela Susana como "uma recta coincidente com o eixo das abcissas". No entanto, ela tem dúvidas se esta recta será uma função. Esta dúvida parece estar relacionada com a representação algébrica, pois ela acha que não há função porque numa expressão do tipo *y=0x*, como *0x* é zero, a função anula-se e portanto não está definida: "Não existem imagens, o objecto é sempre zero... e a imagem é sempre zero. (...) Isso vai anular a função". Esta representação parece reduzir-se a *y=0* onde a variável independente *x*, por não estar representada, parece não ter qualquer influência.

Há situações em que a expressão algébrica é considerada de uma forma global servindo para identificar funções particulares, a partir de uma dada família ou para construir uma dada família com base na identificação de várias funções que lhe pertencem. Assim, ao traçar rectas que passam pelo ponto de coordenadas (0,-2) o Ricardo consegue definir a família destas funções com base nalgumas que tinham sido traçadas:

Ent- Vamos traçar outra que passe pelo mesmo ponto.

S- Pelo mesmo ponto, *4x-2* (...), *-2x-2* [traçam os gráficos].

Ent- Portanto, quantas rectas é que a gente consegue traçar que passem pelo ponto de coordenadas (0,-2)?

S- Uma infinidade; por um ponto passa uma infinidade de rectas.

Ent- Se a gente quisesse definir que família de funções é esta, que passam por este ponto, como é que vocês faziam?

R- *y=ax-2*

O Ricardo parece conseguir fazer uma generalização com base na representação algébrica que lhe permite definir a família das funções que passam pelo ponto de coordenadas (0,-2). Este tipo de raciocínio também parece ser utilizado no sentido inverso, pois quando o Ricardo pretende representar rectas que passem pelo ponto de coordenadas (0,3) começa por definir logo à partida a família destas funções como sendo dada por *y=ax+3*. Noutra situação, onde se pretende definir algebricamente funções afins que passem pelo ponto de coordenadas (2,0), o Ricardo também acaba por definir a família destas funções: "o *b* é o dobro do *a*, pode ficar *-ax+2a*" e acaba por reformular a expressão colocando-a na sua representação mais habitual: *y= ax-b*, com *b* igual a *2a* e o *a* e o *b* de sinais contrários. Este raciocínio é feito com base nalgumas funções que tinham sido representadas graficamente no computador.

Em resumo, a Susana encara as constantes e a variável como sendo entidades às quais se podem atribuir valores. Há, no entanto, um valor representacional que as constantes assumem na expressão. O facto de elas serem representadas por letras diferentes parece conduzir a números diferentes e, portanto, a representações de funções diferentes. Quando as constantes são analisadas com mais pormenor são destacadas particularidades gráficas, onde o coeficiente do *x* é relacionado com a inclinação da recta e o termo independente é identificado com a ordenada na origem. Quando ambas as constantes são nulas a Susana tem algumas dificuldades em identificar a equação *y=0* como representando uma função. Tal parece dever-se ao facto de a variável independente *x* não aparecer explicitamente na representação algébrica.

Para o Ricardo, as constantes podem ser representadas por qualquer letra e o seu papel é distinto do da variável independente. Assim, ele considera que se as constantes são arbitrárias podemos representar uma infinidade de funções, ao passo que se concretizarmos as constantes passamos a ter uma função única. Este tipo de interpretação do papel das constantes na representação algébrica parece proporcionar ao Ricardo a capacidade de raciocinar em termos de famílias de funções. Ele consegue falar em termos destas famílias quer com base numa generalização feita a partir de várias funções, quer partindo da família para chegar a funções particulares.

O grupo Beta parece considerar que não há diferenças entre as representações *y=ax+b*, *y= gx+d* e *y=a+hx*:

R- Representam a mesma coisa.

A- O coeficiente do *x*... a incógnita... aaa... pois é igual, esta é igual a esta se trocarmos.

A Ana parece analisar a representação como se ela fosse composta por três elementos e o facto de estes aparecerem por uma ordem diferente não causa dificuldades de interpretação. Quando se trata de distinguir entre a variável independente e as constantes, a Ana parece não fazer uma distinção muito nítida, uma vez que quando se pretende saber quantos gráficos é que a representação algébrica geral define, ela considera que "são tantos quantos os valores das variáveis, das constantes que podem repetir-se, não é?". Parece assim que quer as constantes quer as variáveis podem tomar quaisquer valores arbitrários assumindo ambas o mesmo estatuto de variável.

A Ana também consegue utilizar a representação algébrica de uma forma global definindo logo à partida a família das funções que passam por um dado ponto. Assim, quando se pede para indicar a representação algébrica de uma recta que passe pelo ponto de coordenadas (0,-2), ela sugere que esta é do tipo "*ax-2*". No entanto, tem algumas indecisões quando pretende indicar algumas destas rectas, pois ao pretender introduzir a expressão algébrica no computador, ela hesita:

> A- *x+2*. Ah! *x-2*. Não...
>
> Ent- *x-2*, será que *x-2* também passa pelo ponto (0,-2)?
>
> A- Quando o x toma o valor de *0* ... [Rui traça o gráfico e a Ana acaba por concluir com base no gráfico traçado]

Embora, anteriormente, tenha definido correctamente a família das rectas que passam pelo ponto dado, a Ana tem alguma dificuldade em definir a representação algébrica num caso concreto e acaba por recorrer à concretização da variável para confirmar se a recta passa no ponto pretendido. Ela parece não deduzir as expressões algébricas particulares da família que definiu inicialmente. O facto de não relacionar os dois tipos de representações parece ser condicionado pela abordagem que foi feita nas aulas, onde os alunos chegaram à família deste tipo de funções com base na interpretação de vários casos particulares e que a Ana utiliza aqui com um valor predominantemente proposicional. O Rui também consegue utilizar com alguma facilidade este tipo de representação, pois quando se pretende saber como poderíamos representar rectas que passem pelo ponto de coordenadas (0,3), ele afirma que elas seriam do tipo "*ax+3*".

Em resumo, a Ana parece considerar que as constantes podem ser representadas por qualquer letra e admite a existência da variável independente que é designada por incógnita. Quando pretende especificar os gráficos que obtêm a partir da representação algébrica geral, ela parece ter algumas dificuldades em fazer uma distinção nítida entre as variáveis e as constantes, considerando que a todas elas se podem atribuir valores. A Ana também consegue utilizar o papel das constantes na definição de famílias de funções. No entanto, quando se trata de obter algumas dessas funções ela tem alguma hesitação. Assim, a abordagem que ela faz parece basear-se em processos estruturais que não são facilmente operacionalizáveis. Embora não tenha sido possível caracterizar a forma como o Rui interpreta as componentes da representação algébrica, é possível afirmar que ele faz uma interpretação das famílias de funções muito próxima da da Ana.

No grupo Gama, quando é pedido para verificarem se há diferenças entre as representações $y=ax+b$, $y= ex+d$ e $y=a+cx$, a Marta considera que não há nenhuma diferença justificando que "hum... todas têm um... coeficiente do x e um elemento sem... constante". Para a Marta a representação geral parece ser abordada a partir do papel desempenhado pelas constantes. Quando se pretende fazer uma análise mais pormenorizada da influência das constantes e do papel da variável independente *x* a Marta considera que a influência do coeficiente *a* tem a ver com a monotonia da recta em causa:

> Indica se a recta vai ser positiva, ou seja crescente, ou decrescente (...) Quando o coeficiente, portanto do *a* é positivo é crescente quando é negativo é decrescente.

A Marta parece fazer alguma confusão entre a monotonia e o sinal da função. O caso de *a* ser zero não é referido. Contudo, quando se pretende saber se no caso de *a* ser zero ainda estamos perante uma função, a Marta acha que "nesse caso o que temos é rectas paralelas ao eixo dos *XX*", não sendo assim excluída a situação em que a representação algébrica não apresenta formalmente a variável *x*. Também quando é pedido para justificar o que acontece se para além de *a* ser zero também o *b* se anula, a Marta continua a recorrer à representação gráfica como forma de especificar a representação $y=0$ "ficamos só com o eixo dos *XX*, quer dizer... ficamos com os valores correspondentes ao eixo dos *XX*". A variável independente *x* parece não causar quaisquer dificuldades à Marta, pois ela acha que "através do *x* podemos dar uma infinidade de valores que fará corresponder a cada objecto uma imagem".

A Marta também consegue utilizar a expressão algébrica que lhe permite definir uma dada família de funções. Assim, quando se pede para representar rectas que passem pelo ponto de coordenadas (0,-2), ela consegue indicar algumas argumentando que o que faz com que passem todas no mesmo ponto "é o *b* ser *menos dois*". A partir desta argumentação ela consegue fazer a generalização da expressão algébrica considerando que elas pertencem à família "*ax+(-2)* ... *ax-2*"".. A Marta consegue, assim, falar da representação algébrica que define uma família de funções servindo-se para tal de algumas funções em particular e do facto de conhecer a influência da constante *b*. Este processo corresponde ao tipo de abordagem que tinha sido feito durante as aulas e ela parece utilizá-lo de uma forma proposicional, pois quando se pede para indicar algumas rectas que passem pelo ponto de coordenadas (0,3), ela indica quatro $y=x+3$, $y=\frac{1}{2}x+3$, $y=3$ e $y=-x+3$, como se se tratasse de uma regra que gera determinado tipo de funções.

Em resumo, a Marta considera que a representação algébrica da função afim é constituída por dois monómios, um de primeiro grau e outro de grau zero. Ela aceita que estes monómios podem aparecer por qualquer ordem ou mesmo que alguns deles podem não estar presentes na representação. Embora não seja possível fazer uma distinção clara entre o papel das constantes e da variável independente, a Marta consegue sempre caracterizar cada uma destas entidades por forma a definir as funções pretendidas. Quando as constantes são analisadas, com mais pormenor, ela acaba por destacar particularidades gráficas onde o coeficiente do *x* é relacionado com a monotonia da função e o termo independente é identificado com o ponto onde o gráfico corta o eixo dos *YY*. A Marta revela também a capacidade de trabalhar com famílias de funções onde o papel das constantes é determinante. Ela estabelece as famílias de funções a partir da análise de várias funções concretas, fazendo uma generalização, mas parece estar subjacente uma visão mais estrutural que poderá ter sido adquirida durante o processo de ensino-aprendizagem.

No grupo Delta a representação algébrica da função afim é quase sempre interpretada na interligação com outras representações, sobretudo a gráfica, pelo que existem poucos dados. Ao verificar se há diferenças entre as representações $y=ax+b$, $y= gx+d$ e $y=a+hx$, a Joana faz uma análise das representações onde distingue dois elementos, um associado à variável x e o outro referindo-se à constante: "[há diferenças] só [n]a posição dos valores porque elas são sempre, têm sempre o valor em *x* e um valor sem ser em *x*". A variável *x* parece ser um factor importante, pois é a partir dela que é feita a identificação das componentes da expressão algébrica. Há, contudo, alguma dificuldade em fazer a distinção entre a variável *x* e o seu coeficiente *a*. Já ao longo dos relatórios elaborados a partir das aulas em computador, o grupo Delta apresentou esta dificuldade, referindo-se à variável *x* quando pretendia falar do seu coeficiente.

O Bruno, ao pretender representar determinadas funções, também utiliza a representação algébrica que lhe permite definir a família correspondente. No entanto, na abordagem que utiliza toma como referência a influência das constantes. Assim, ao pretender definir algebricamente as rectas que passam pelo ponto de coordenadas (0,3), ele considera que o *b* tem que ser três e designa a família por $y=ax+3$..

Em resumo, embora não se consiga fazer uma caracterização muito completa da forma como é interpretada a representação algébrica, a Joana parece apresentar alguma dificuldade em separar as constantes da variável independente *x*, variável esta que assume um papel importante na compreensão da representação algébrica, pois é sempre referida na identificação dos monómios que a compõem. O Bruno, ao traçar os gráficos que lhe são pedidos, não explicita o seu raciocínio mas consegue introduzir as representações algébricas que lhe permitem obter esses gráficos. Ele parece estar a utilizar o papel das constantes com base em processos estruturais pelo que, várias vezes, tem que recorrer à alteração destas para obter o gráfico pretendido.

3.1.2 - A representação algébrica da função quadrática

Neste estudo os alunos trabalharam funções quadráticas apresentadas em equações do tipo $y=ax^2+bx+c$ e ocasionalmente do tipo $y=(x+a)(x+b)$ e $y= a(x-h)^2+k$. Apresenta-se, de seguida, uma caracterização da forma como os alunos utilizam as representações algébricas anteriores por forma a identificar como são interpretadas as variáveis e as constantes bem como qual é o papel das constantes na sua interpretação e descrição. Nalguns casos, os alunos conseguem falar em termos de famílias de funções definindo, à partida, a sua representação algébrica.

Ao pretenderem representar gráficos de duas parábolas, em que uma tenha a concavidade virada para cima e a outra virada para baixo, o grupo Alfa opta pela expressão algébrica geral $y=ax^2+bx+c$ representando sempre polinómios completos. A Susana identifica o sentido da concavidade da parábola com o sinal do coeficiente do x^2 "tem a concavidade virada para cima porque o coeficiente do x^2 é positivo". É ainda com base na representação algébrica que ela identifica alguns pontos em particular como é o caso da intersecção com o eixo dos *YY*: "é o ponto onde a parábola intersecta o eixo das ordenadas, que corresponde ao *c*". É também com base na constante *c* que, por vezes, a Susana utiliza a representação algébrica da família de determinadas funções. Ao pretender representar uma parábola que tenha o vértice no ponto (0,-3) ela utiliza a expressão algébrica geral de todas as parábolas que têm o vértice sobre o eixo das ordenadas:

Ent- Eu agora queria uma [parábola] que tivesse o vértice no ponto (0,-3).

S- É do tipo ax^2-c.

Ent- Então experimentem lá a traçar uma qualquer.

S- $2x^2-3$.

A Susana parece fazer uma abordagem algébrica global, considerando uma família de parábolas e, só posteriormente, concretiza uma dessas parábolas. Ela parece estar a utilizar a representação algébrica geral como modelo tendo por base a abordagem que foi feita nas aulas. Também noutra situação a Susana e o Ricardo voltam a utilizar as representação das famílias de funções como forma de definir as expressões algébricas dos gráficos pretendidos. Assim, ao pretenderem representar uma parábola que tenha por contradomínio o conjunto dos números reais positivos incluindo o zero, eles consideram que:

S- Então, talvez a mais simples seja ...

R- ax^2+bx, e depois

S- pode ser só ax^2. Portanto $2x^2$.

O recurso à família das funções para definir algumas em particular parece ser uma abordagem que lhes permite definir com alguma facilidade os gráficos pretendidos.

Perante a representação algébrica $y=(x+3)(x-2)$, o grupo Alfa utiliza alguns pontos em particular e tenta estabelecer algumas relações com as constantes da representação anterior. Ao pretender encontrar a representação simétrica de $y=(x+3)(x-2)$ eles consideram que ela deve ser dada por $y=(x-3)(x+2)$. A Susana interpreta os pontos de intersecção com o eixo dos *XX* da nova função e refere que esta não tem os mesmos zeros "$(x-3)(x+2)$?.. $x-3$ passava pelo ponto três... dava três e menos dois mas o x tem que ser menos três e dois, não tem? E com aquela ali não dá". Quando o Ricardo traça o gráfico a Susana acha que deveria ter um valor negativo no x , pois a concavidade da parábola ficou voltada para cima. Assim, a Susana sugere que o primeiro factor deve ficar $(-x+3)$, "que é para dar menos três mais três que é zero" e no segundo factor também tem que aparecer $(-x+2)$, "então aí tem que dar... aí tem que ser menos x que é para dar menos dois mais dois que é zero". A Susana parece estar preocupada com o facto de os valores das abcissas serem os mesmos, contudo, não analisa a representação no seu todo, acabando por obter uma representação diferente da pretendida. Verifica-se que há a preocupação de que o coeficiente do x^2 seja negativo. O Ricardo parece fazer uma abordagem global da representação e sugere que para obter a representação pretendida se utilize a inicial colocando-a entre parentesis e afectada com o sinal de menos "temos esta e temos esta... fazemos um parentesis aqui e um parentesis aqui e punha-se menos à frente". Este tipo de abordagem já tinha sido feita anteriormente considerando o Ricardo que a representação algébrica era um caso notável: "desdobrando o caso notável vai dar um termo em x^2".

Outra forma de representar algebricamente uma função quadrática é a partir de uma equação $y=a(x-h)^2+k$. Tal como no caso anterior, há a tentativa de estabelecer relações entre as constantes desta fórmula e as da que foi dada inicialmente. Quando é pedido à Susana para representar uma parábola com os mesmos zeros que uma dada anteriormente, mas com a concavidade voltada para baixo, ela tenta recorrer à representação algébrica geral $y= a(x-h)^2+k$, que foi utilizada nas aulas e onde o ponto de coordenadas (h,k) representa o vértice da parábola. Ela parece querer estabelecer uma relação entre o b e o h e entre o c e o k: "então podemos logo escrever $-x^2+$... o que é que o b significa nas quadráticas... muda a posição, por exemplo desloca assim a parábola ao longo do eixo das abcissas (...) e o c desloca ao longo do eixo das ordenadas". Do mesmo modo, quando se pretende determinar uma representação algébrica para um dado gráfico a Susana volta a apelar à representação anterior "se a gente soubesse portanto a versão original das transformações que a parábola sofresse".

Em resumo, a Susana consegue identificar funções quadráticas em representações algébricas formalmente diferentes. A representação ax^2+bx+c é aquela que é utilizada com mais frequência e onde as constantes a e c assumem papéis de destaque. O a é associado com o sentido da concavidade, consoante seja positivo ou negativo, e o c designa o ponto onde o gráfico da função corta o eixo dos *YY*. Este tipo de interpretação parece ser determinante no recurso, por parte da Susana, à representação de algumas funções a partir da respectiva família. Ela utiliza a família de funções como forma de estabelecer algumas funções particulares, o que parece sugerir que ela tem uma boa compreensão deste tipo de representação. Ao utilizar a representação $y= a(x-h)^2+k$, a Susana volta a evidenciar o papel das constantes da representação anterior, pretendendo estabelecer uma correspondência entre b e h e entre c e k. No caso da representação $y=(x+a)(x+b)$ a Susana consegue estabelecer uma relação entre os zeros da função e as constantes *a* e *b*. Quando se trata de definir outras representações com base na anterior, como por exemplo a sua simétrica, ela faz uma abordagem baseada em processos operacionais como a alteração do sinal das constantes *a* e *b* e a multiplicação de ambos os termos da expressão por menos um.

O Ricardo tem uma intervenção mais moderada, no entanto consegue em determinadas situações apelar para as famílias de funções fazendo uma abordagem mais estrutural da representação. Este tipo de abordagem volta a estar presente quando ele pretende definir a representação simétrica de $(x+3)(x-2)$, sugerindo que se coloque toda a expressão entre parentesis e se afecte do sinal menos.

O grupo Beta, ao pretender representar gráficos de duas parábolas, utiliza a expressão algébrica geral, $y=ax^2+bx+c$ e representa polinómios completos. A interpretação da influência das constantes é feita com base na interligação desta representação com a gráfica, assumindo, por vezes, características que são determinadas pela interpretação do gráfico respectivo. Há algumas situações em que as constantes parecem ser determinantes para que a Ana fale sobre as famílias de determinadas funções. Assim, quando se pretende representar uma parábola com o vértice no ponto de coordenadas (0,-3), ela parece fazer uma abordagem algébrica global e utiliza a expressão geral de todas as que têm o vértice nesse ponto, escrevendo no papel a expressão ax^2-3. Posteriomente, ela introduz a expressão $y=2x^2-3$ concluindo que o que elas têm que ter em comum é o coeficiente menos três. A Ana consegue assim fazer uma abordagem em termos da família de funções que lhe permite definir a expressão algébrica pretendida.

A equação $y=(x+3)(x-2)$ é considerada pela Ana como representando uma função quadrática:

A- É uma função quadrática.

Ent- É uma função quadrática não é? Porquê?

A- Porque isto é um caso notável (...) a diferença de dois quadrados, não é?

A Ana parece fazer uma interpretação global da representação por forma a associá-la à de um caso notável. Este tipo de interpretação parece continuar a ser utilizado quando lhe é pedido para identificar os zeros, uma vez que ela considera que são "menos dois e três", identificando-os a partir dos termos independentes de cada um dos factores.

Em resumo, a Ana utiliza preferencialmente a representação algébrica $y=ax^2+bx+c$ para representar funções quadráticas. Embora não seja possível analisar em pormenor a forma como ela interpreta as constantes, por estas serem quase sempre referidas em termos gráficos, é possível verificar que a Ana consegue, em determinadas situações, utilizar as famílias de funções para definir algumas funções em particular. Este tipo de abordagem parece sugerir que ela está a raciocinar em termos estruturais, o que também acontece quando pretende justificar que a representação $y=(x+3)(x-2)$ é uma função quadrática, pois trata-se de um caso notável.

Para a Marta uma função quadrática parece estar relacionada com um polinómio de grau dois completo. Quando lhe foi pedido para traçar gráficos de duas parábola, em ambas as expressões representadas, ela introduziu polinómios completos. O mesmo parece acontecer quando lhe é pedido para traçar uma função quadrática por forma que o seu contradomínio seja $\Re_0^+$. A Marta começa por experimentar a representação gráfica de $y= x^2+x+2$. Como o contradomínio desta não serve ela experimenta traçar $y= x^2+x$ e como esta função também não tem por contradomínio $\Re_0^+$ acaba por concluir que "x^2dá de certeza, que isso eu sei... mas eu queria uma assim mais completa". Quando se pretende caracterizar a influência das constantes, a Marta considera que o que determina o sentido da concavidade "é o coeficiente do x^2 ser positivo ou negativo", bem como a amplitude da parábola, pois ao comparar as representações gráficas de duas parábolas ela chega à conclusão de que uma delas ficou mais fechada "porque aumentámos o coeficiente do x^2". Também os pontos de intersecção com os eixos coordenados são definidos a partir da representação algébrica. Assim, as funções quadráticas "intersectam o eixo das ordenadas, o eixo dos *YY* no valor correspondente ao valor de *c*, ao valor constante,... e intersecta o eixo das abcissas nos seus zeros, ou seja, quando o objecto corresponde à imagem zero". Ainda quando é pedido para representar uma parábola com o vértice no ponto de coordenadas $(0,3)$, a Marta utiliza a representação algébrica tendo em conta a influência da constante *c*: "a parábola tem que intersectar sempre o eixo dos *YY* no valor de *c*".

Quando é confrontada com a representação $y=(x-2)(x+3)$ a Marta acha que é uma função polinomial do segundo grau, pois vai ter um termo em x^2 "sim do segundo, vai dar ao quadrado, é do segundo porque vai dar x^2". Ela parece reconhecer a representação a partir da interpretação dos seus elementos constituintes e não de uma forma global.

Em resumo, a Marta utiliza preferencialmente a expressão algébrica $y=ax^2+bx+c$ para representar funções quadráticas tendo o cuidado de que os polinómios sejam completos. As constantes *a* e *c* desta representação assumem características especiais na determinação das expressões algébricas das funções, sendo o *a* associado com o sentido e abertura da concavidade, enquanto que o *c* determina o ponto onde o gráfico corta o eixo dos *YY*. As representações de funções quadráticas, que a Marta utiliza, têm por base a influência destas constantes, podendo considerar-se que ela faz uma abordagem com base em procedimentos operacionais da representação.

O grupo Delta não parece preocupar-se com o facto de a representação ser ou não um polinómio completo. Quando lhes é pedido para representar duas funções quadráticas, eles optam pela representação mais simples $y_1= -x^2$ e $y_2= x^2$. Embora as constantes da expressão geral ax^2+bx+c não sejam analisadas com detalhe na representação algébrica, o *c* parece assumir um papel importante ao abordar a equação $y=(x-2)(x+3)$. O Bruno ao tentar representar a função simétrica de $y=(x+3)(x-2)$ introduz $y=(-x-3)(-x+2)$. Ao traçar o gráfico verifica que dá o mesmo, justificando que esta representação não é a simétrica da anterior pois "o simétrico é... mais por menos... tem que ser menos três... [altera a expressão editando $(x+3)(-x+2)$]". Ele parece estar a analisar a representação algébrica considerando a ordenada na origem que é dada pelo termo independente do polinómio de grau dois que se obtém aplicando a propriedade distributiva, cujo valor é menos três vezes dois que é menos seis e que, neste caso, para ter a representação simétrica deveria ser três vezes dois que era seis. Este tipo de análise já tinha sido feito anteriomente quando lhe foi perguntado qual era o ponto de intersecção com o eixo das ordenadas da função $y=(x+3)(x-2)$, pelo que ele justificou que corta o eixo das ordenadas "no ponto seis... menos seis, menos dois vezes três dá menos seis". Quando é pedido para indicar os zeros a partir da representação algébrica anterior o Bruno argumenta que:

B- Dá menos três e dois.

Ent- Os zeros dão menos três e dois. Porquê?

B- Vai anular aqui, se for dois menos dois é zero.

Ele utiliza a resolução algébrica fazendo assim uma interpretação pormenorizada da representação.

Em resumo, o Bruno utiliza apenas o monómio de grau dois quando pretende representar funções quadráticas. No entanto, ele parece conseguir analisar o papel de algumas das constantes da expressão geral ax^2+bx+c. A constante c é associada ao ponto onde o gráfico corta o eixo das ordenadas e o Bruno consegue identificar a constante correspondente na representação $y=(x+a)(x+b)$ considerando que ela resulta do produto $a.b$.

3.2 - A representação gráfica

Este estudo focou essencialmente as interpretações dos alunos sobre representações gráficas da função afim, quadrática e respectivos módulos. A análise que a seguir se apresenta refere-se à abordagem que os alunos fizeram a partir da interpretação da representação gráfica sem recorrer directamente à representação algébrica. No entanto, como estas representações são abordadas a partir do ecrã do computador, a representação algébrica acaba por lhe estar associada, pois é necessária para obter o seu traçado.

A competência de utilizar a representação gráfica para passar de imagens para os objectos correspondentes será analisada mais adiante aquando da resolução gráfica de equações e inequações.

3.2.1 - A representação gráfica da função afim

No caso da função afim, os alunos recorrem à representação gráfica em especial em situações envolvendo a inclinação da recta, a monotonia e o sinal da função, bem como quando pretendem resolver equações e inequações. Todos os alunos associaram rectas às funções afins.

No grupo Alfa, a interpretação das representações gráficas feitas em computador conduzem a conclusões que se complementam. Enquanto que o Ricardo interpreta o coeficiente a da função $y=ax$ como influenciando a inclinação da recta, "se o *a* aumenta ... quer dizer ... [a recta] fica mais junto ao eixo dos *YY*", servindo-se para tal dos gráficos de algumas rectas traçadas em computador, a Susana recorre aos gráficos para interpretar a monotonia argumentando que "[se o *a* for positivo] a função é crescente e se for negativo a função é decrescente". Também ao simularem uma recta crescente com o lápis sobre o ecrã do computador, a Susana e o Ricardo concordam que uma função que fosse representada por este gráfico simulado seria crescente, como afirma o Ricardo "os valores vão subindo". Na resolução de inequações, a Susana utiliza a representação gráfica para definir o seu conjunto solução. Assim, ao tentar resolver a inequação $f(x)>2$, figura 5.2, ela utiliza a representação gráfica considerando que o seu conjunto solução é constituído por valores de *x* maiores que menos um. Ao tentar explicar esta solução argumenta:

S- Então vi a imagem. Tem que ser maior que dois. Se ela no menos um é igual a dois, então, [se a função] tem que ser maior que dois, o objecto tem que ser maior que menos um.

Ent- [Repetindo] Se o objecto é maior que menos um, a imagem é?

S- Maior que dois. Porque ela vai sempre a crescer, [é] estritamente crescente.

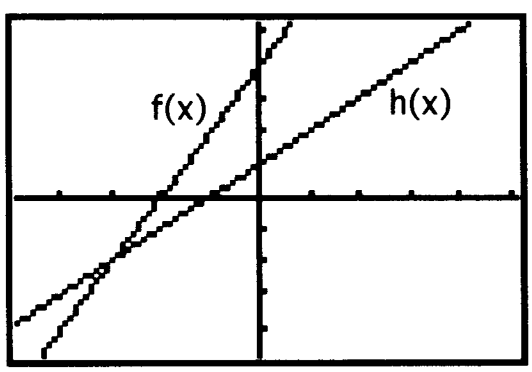


Figura 5.2

A Susana parece ser capaz de utilizar um modelo dinâmico de função em que, à medida que o *x* percorre o eixo das abcissas no sentido positivo, a função toma valores cada vez maiores no eixo das ordenadas.

A resolução de inequações do tipo $f(x)>h(x)$ também é feita a partir da interpretação dos gráficos representados no computador (figura 5.2) onde a Susana considerou que o conjunto solução era de "menos três a mais infinito". A partir da forma como a Susana utiliza as representações gráficas anteriores, podemos considerar que ela consegue fazer uma leitura adequada dos pontos no gráfico, conseguindo identificar as suas coordenadas.

Em resumo, a Susana consegue a partir da representação gráfica falar da monotonia da função. Ela consegue analisar a variação do gráfico da função a partir da conjugação das variáveis independente e dependente, verificando que a variação de uma implica a variação da outra. O gráfico aparece como a forma de relacionar as variáveis. O Ricardo também consegue analisar a variação da função a partir do gráfico. No entanto, a forma como ele explicita essa variação parece estar mais relacionada com uma leitura que ele faz no eixo dos *YY*. Também quando ele se refere à inclinação da recta, esta é relacionada com o eixo dos *YY*.

No grupo Beta, a Ana utiliza a representação gráfica de funções no computador para comparar as rectas $y=x-2$ e $y=3x-2$, considerando que o gráfico da segunda fica mais inclinado do que o da primeira. Ela não faz, contudo, qualquer referência à influência dos parâmentos da representação algébrica. Na resolução de inequações a Ana e o Rui utilizam a representação gráfica. Ao resolver a inequação $x-2>-x-2$ (figura 5.3), a Ana conclui que o conjunto solução é constituído pelos reais positivos, pois as imagens da primeira "estão acima" das imagens da segunda.

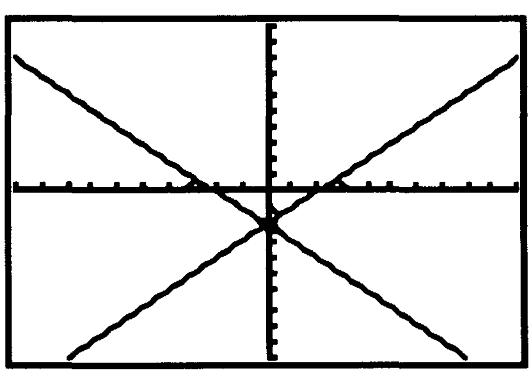


Figura 5.3

Ocasionalmente, a Ana considera apenas o valor absoluto dos pontos representados no plano cartesiano. Por exemplo, ao tentar encontrar as soluções da inequação $2x+4>x-3$ (figura 5.4), a Ana considera a abcissa do ponto de intersecção sem ter em atenção o seu valor relativo ,admitindo que o seu valor é sete e, só posteriormente, corrige para menos sete.

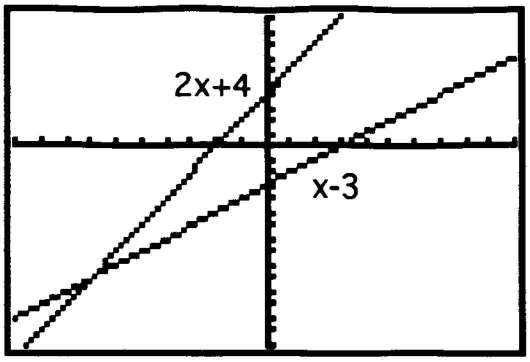


Figura 5.4

A Ana também parece considerar apenas uma das coordenadas dos pontos, dando especial importância ao ponto de intersecção dos gráficos com o eixo dos *YY*. Ao tentar identificar a representação algébrica de duas rectas paralelas, de entre vários gráficos representados no computador, ela utiliza o ponto de intersecção com o eixo dos *YY* como referência e conclui que as expressões *y=-x-2* e *y=-x+2* representam rectas paralelas:

> Porque, para já, o dois ali [indica a expressão algébrica *y=-x+2*] é positivo. Aqui é o dois [indica o ponto onde o gráfico de *y=-x+2* corta o eixo dos *YY*] passa pelo ponto dois. Ali o *b* é menos dois [indica a expressão algébrica *y=-x-2*] passa pelo ponto menos dois [indica o ponto onde o gráfico de *y=-x-2* corta o eixo dos *YY*]

A Ana consegue pois identificar, no gráfico, pontos particulares que são relacionados com os coeficientes da expressão algébrica de uma forma directa permitindo identificar a mesma função em diferentes representações.

O Rui utiliza a noção de simetria quando se refere ao comportamento do gráfico da função afim. Ao tentar descrever o comportamento do gráfico da função módulo de *-x+4* , ele afirma que "ao chegar a este ponto [abcissa quatro] volta para cima, portanto é o simétrico daquele [refere-se à parte negativa do gráfico]".

Em resumo, a Ana consegue decidir acerca da inclinação das rectas com base na interpretação dos seus gráficos. Ao pretender decidir quando é que uma função afim é maior do que outra, ela parece utilizar o eixo dos *YY* como referência, considerando que as imagens de uma "estão acima" das da outra, num dado intervalo. Este tipo de abordagem pressupõe que para além da comparação entre as imagens das duas funções, a Ana consegue compreender a relação entre as variáveis independente e dependente, pois indica correctamente o intervalo real onde as imagens duma são superiores às da outra. Por vezes, na identificação de gráficos que obedecem a determinadas características, a Ana utiliza como estratégia a identificação de pontos no gráfico, pontos estes que, na maior parte das vezes, se situam sobre os eixos. Estes pontos apenas são referenciados com uma das suas coordenadas sendo estas, por vezes, tomadas em valor absoluto. O Rui tem uma atitude menos interventiva neste tipo de situações. No entanto, quando se trata de explicar o que acontece com o gráfico do módulo de uma função afim, ele consegue caracterizá-lo em termos da simetria, em relação ao eixo dos *XX*, que se verifica na parte onde a função é negativa.

No grupo Gama, a Marta associa a inclinação da recta ao coeficiente *a* da representação algébrica. Quando se pede para explicar o que acontece quando o *a* aumenta, a Marta observa os gráficos já traçados no computador e afirma que "[a recta] vai ficando mais inclinada". A monotonia da função afim também é interpretada a partir da representação gráfica e relacionada com o coeficiente *a* da expressão algébrica, pelo que a Marta argumenta que "quando o *a* é positivo [a função] é crescente e quando é negativo é decrescente". A Marta faz assim uma interpretação dos gráficos onde quer a inclinação quer a monotonia são discutidas com base na influência do coeficiente *a*.

Na resolução de inequações, a Marta também utiliza a representação gráfica. Entretanto, ela considera as imagens como solução da inequação e dá a resposta em termos de valores do eixo dos *YY*. Ao resolver a inequação $f(x)>2$ (figura 5.2) afirma :

> M- [Resolver a inequação] graficamente? ... Maior que dois? Então vamos ver ... *f(x)* não é? Maior que dois !... Então vamos ver quando é que as imagens são superiores a dois.
>
> (...)
>
> M- Por exemplo aqui já é [aponta o ponto (0,2)]... a partir do valor $x+2$.

A Marta consegue identificar as imagens no gráfico bem como o facto de a função ser crescente. Desta interpretação ela consegue estabelecer a parte do gráfico que satisfaz a inequação. Contudo, a sua resposta não traduz o conjunto solução que tem que ser definido em termos da variável independente.

Em resumo, a Marta consegue interpretar a variação da função afim a partir da sua representação gráfica. A inclinação das rectas também é compreendida a partir da interpretação dos gráficos. Quando se pretende fazer a resolução gráfica de inequações, a Marta utiliza o eixo dos *YY* como referência para decidir onde se situam as imagens que satisfazem a inequação. Ela tem alguma dificuldade em relacionar, no gráfico, as variáveis independente e dependente, por forma a encontrar a solução da inequação e faz uma leitura do intervalo que parece englobar ambas as variáveis em simultâneo.

No grupo Delta, a inclinação da recta é interpretada a partir da representação gráfica e relacionada com o coeficiente *a* da expressão algébrica. Para eles a recta está tanto mais inclinada quanto mais próxima está do eixo dos *XX*, ou seja, quanto menor é o ângulo desta com a horizontal. Assim, quando lhes é pedido para indicarem o que acontece quando o coeficiente de *x* vai aumentando eles acham que a recta se vai aproximar do eixo dos *XX* :

> J- Vai-se inclinar mais, mais próxima do eixo dos *XX*.
>
> B- Diminuímos [o *a* noutro gráfico que entretanto traçou] e ela inclinou-se mais.

O Bruno utiliza a representação gráfica da função $y=-x+2$ para estudar o seu sinal afirmando que ela é positiva "de menos infinito a dois aberto", nula em dois e negativa no restante intervalo real. Ao tentar resolver a inequação $2x+4>x+1$ (figura 5.2), o Bruno acaba por considerar que o conjunto solução é constituído pelos valores do eixo dos *YY*:

> É deste ponto aqui, [aponta para o extremo inferior do eixo dos *YY* visível no gráfico] menos infinito até àquele ponto que é menos dois, mais ou menos [aponta para o ponto (0,-2)]

As soluções da inequação são associadas com as imagens o que denota uma abordagem essencialmente gráfica. O Bruno também parece compreender a representação gráfica de menos infinito, embora tenha indicado a sua posição como sendo um ponto. Ao identificar os pontos no plano cartesiano, a Joana considera a coordenada do ponto sem ter em atenção o seu valor absoluto. Ao interpretar o ponto de intersecção da recta definida por $y=2x+2$ com o eixo dos *XX* (figura 5.5),a Joana considera que a recta "está a passar no um" em vez de menos um.

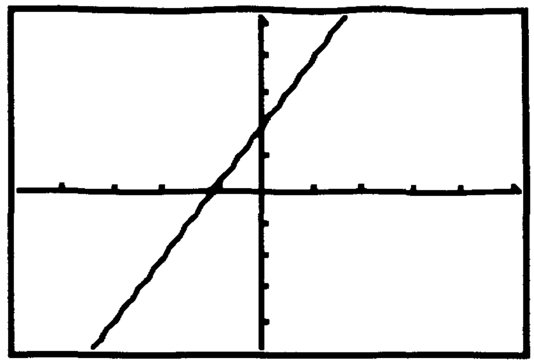


Figura 5.5

Em resumo, a Joana e o Bruno interpretam a inclinação da recta a partir do ângulo que ela faz com o eixo dos *XX*. Eles consideram que quanto menor for este ângulo maior vai ser a sua inclinação. Esta interpretação parece revelar que eles têm uma noção de inclinação diferente das dos restantes alunos, noção esta que eles confirmam traçando outros gráficos de funções afins no computador. O Bruno consegue estudar o sinal da função afim a partir da interpretação do respectivo gráfico, utilizando para tal o eixo dos *YY* como referência. No entanto, quando se trata de resolver inequações ele continua a fazer o mesmo tipo de abordagem, considerando que as soluções da inequação são valores do eixo das ordenadas, não conseguindo relacionar as variáveis independente e dependente ao mesmo tempo. A Joana quando pretende referir pontos do gráfico que se situam sobre os eixos, utiliza apenas a coordenada do ponto que não é nula e, por vezes, essa coordenada é considerada em valor absoluto.

3.2.2 - A representação gráfica da função quadrática

No caso da função quadrática a representação gráfica é utilizada como forma de os alunos interpretarem o seu sinal, o domínio e o contradomínio, a simetria do gráfico e a simetria em relação ao eixo das abcissas. Esta representação é também usada na resolução de inequações e na identificação de pontos do plano cartesiano.

No grupo Alfa, o sinal da função é interpretado a partir da representação gráfica. Ao estabelecer o sinal da função representada pelo gráfico da figura 5.6, a Susana considera que ela é positiva entre os seus zeros e negativa nos intervalos "de menos infinito até esse tal ponto [zero da função na parte negativa do eixo dos

XX] e depois desse ponto [zero da função na parte positiva do eixo dos *XX*] até mais infinito".

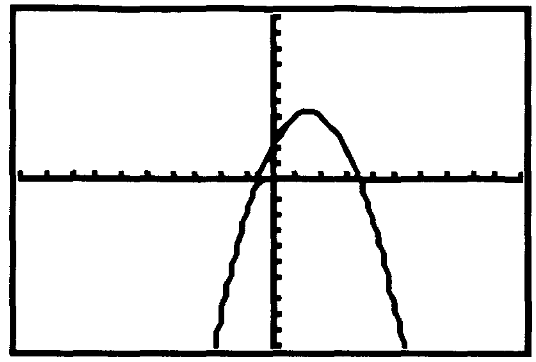


Figura 5.6

Ao tentar representar graficamente uma segunda parábola com os mesmos zeros que a representada no ecrã do computador, figura 5.7, a Susana considera que ela pode ter o vértice no ponto de ordenada menos um, indicando com o dedo o ponto no ecrã do computador, e passar por aqueles pontos. Embora não tenha em atenção as coordenadas do vértice da parábola e o facto de ela apresentar um eixo de simetria, a Susana apresenta desta forma uma abordagem, essencialmente, gráfica que lhe permite visualizar os diferentes gráficos de parábolas que passam por aqueles dois pontos. O Ricardo parece utilizar a noção de simetria relativamente ao eixo das abcissas como forma de descrever o gráfico da função módulo. Ao interpretar o gráfico representado no ecrã do computador, do módulo da função representada pela figura 5.7, ele considera que "[n]a parte que era negativa houve uma transposição para cima [e a que era positiva] continuou na mesma, positiva". A passagem ao gráfico do módulo é assim associada a um movimento onde o eixo dos *XX* parece ter um papel de reflexão.

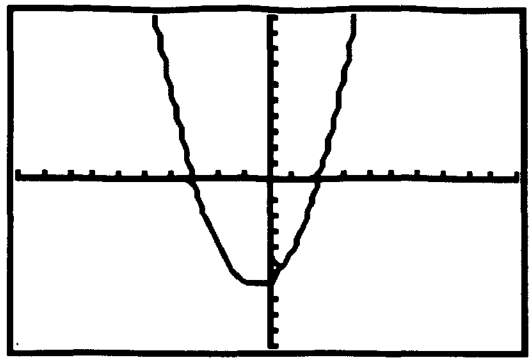


Figura 5.7

O domínio e contradomínio são, por vezes, interpretados a partir da representação gráfica. O Ricardo utiliza o gráfico do módulo da função representada na figura 5.7, que está no ecrã do computador para concluir que o seu domínio é $\Re$ e o contradomínio é "de zero para cima".

Em resumo, a Susana utiliza a representação gráfica da função quadrática no estudo do seu sinal e consegue relacionar ambas as variáveis, independente e dependente, por forma a definir correctamente os intervalos onde a função é positiva e negativa. Ela consegue, também, visualizar os gráficos de várias parábolas com os mesmos zeros, contudo não tem em atenção o rigor da representação gráfica ao analisar essas parábolas, pois não considera o eixo de simetria. O Ricardo apresenta uma boa compreensão da representação gráfica do módulo e utiliza a noção de simetria em relação ao eixo dos *XX* quando pretende explicar o que acontece ao gráfico de uma parábola, quando lhe é aplicada a função módulo. O gráfico também é utilizado por ele como uma forma de estabelecer o domínio e contradomínio da função quadrática, pressupondo uma capacidade de relacionar graficamente as variáveis independente e dependente.

No grupo Beta a interpretação do sinal da função é feito a partir da representação gráfica. Ao estudar o sinal da parábola da figura 5.8, a Ana e o Rui fazem uma abordagem global concluindo que ela é positiva entre os seus zeros e negativa nos intervalos fora dos zeros.

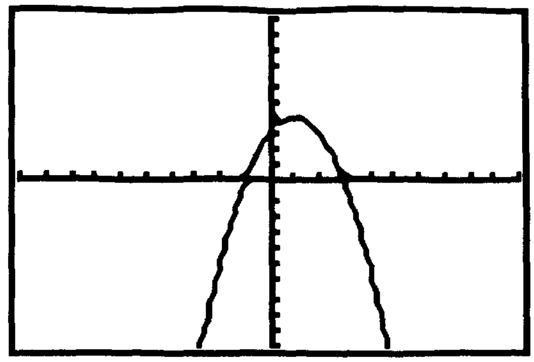


Figura 5.8

Ao identificar o contradomínio da função $y=(x-2)(x+3)$,a Ana utiliza a sua representação gráfica (figura 5.7) para concluir que "era desde ali [indica a ordenada do vértice] até mais infinito". É a partir da representação gráfica do módulo desta função que a Ana utiliza a noção de simetria relativamente ao eixo das abcissas. Ao representar o módulo da parábola da figura 5.7, ela argumenta que "tendo como eixo de simetria o eixo dos *XX* esta parte aqui [parte do gráfico situada abaixo do eixo] salta para cima". A noção de simetria aparece associada a um certo dinamismo em que o gráfico está envolvido como se as imagens dessem "saltos".

Ao pretender estabelecer uma representação algébrica para o gráfico da figura 5.9, a Ana considera determinantes os pontos de intersecção com o eixo das abcissas:

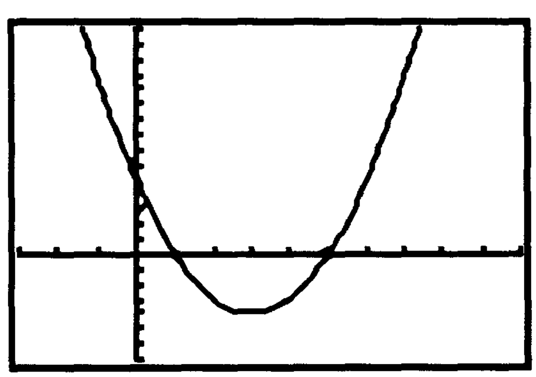


Figura 5.9

Ent- Será que a gente consegue arranjar uma expressão analítica para este gráfico?

A- Talvez assim... Quando $x=2$ e $x=5$ a função é nula. O *ax*...

R- dois ou um?

A- Ah! é um, está certo. E o *a* tem que ser maior que zero.

Os pontos são referidos tendo em conta apenas o valor das suas abcissas e a Ana salienta o sentido da concavidade relacionando-o com o sinal do a, coeficiente do termo em x^2, considerando que este tem que ser positivo.

Em resumo, a Ana utiliza a representação gráfica da função quadrática como forma de identificar algumas das características da função. Assim, o sinal da função é interpretado a partir da observação do gráfico, conseguindo ela relacionar ambas as variáveis por forma a definir os intervalos onde a função é positiva e negativa. O mesmo tipo de abordagem também é feito quando se pretende determinar o contradomínio da função. Nestas abordagens a Ana utiliza como referência os pontos onde o gráfico corta os eixos. No entanto, estes pontos são interpretados de uma forma global e referidos tendo em conta apenas a coordenada que não é nula. A representação gráfica da função módulo também é compreendida em termos gráficos e é interpretada com base na transformação das imagens negativas em positivas onde o eixo dos *XX* funciona como eixo de simetria.

No grupo Gama, a Marta utiliza a noção de simetria quando se pretende interpretar a função módulo de uma quadrática. Ao interpretar o gráfico da figura 5.10, ela considera que o seu módulo vai "inverter" o gráfico "vai ficar invertido para cima. Só a parte correspondente ao intervalo dos seus zeros é que ficava igual". Ao considerar a parte do gráfico que ficava invertida, ela refere-se à simetria relativamente ao eixo dos *XX*: "ficava simétrico, tendo por eixo de simetria o eixo das abcissas".

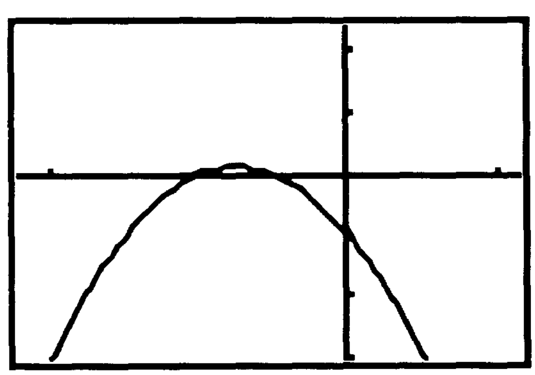


Figura 5.10

Também ao analisar o módulo do gráfico da figura 5.7, a Marta considera a simetria em relação ao eixo dos *XX*: "até aqui [- ∞ até menos três] ficava igual e esta parte aqui entre os zeros ficava simétrica, sendo o eixo das abcissas o eixo de simetria".

Quando pretende analisar a representação gráfica da parábola, a Marta considera o seu eixo de simetria. Embora ela tenha algumas dificuldades com a representação algébrica deste eixo, consegue definir a parábola que tem por eixo de simetria o eixo das ordenadas. Ao tentar representar uma parábola com o vértice no ponto (0,-3) ela considera que a função definida por $y=x^2-3$ tem o vértice nesse ponto:

> A parábola tem que intersectar sempre o eixo dos *YY* no valor de *c*. Isso é aqui neste ponto [indica o ponto (0,-3) no sistema de eixos do ecrã do computador]. E [o que] determina o eixo de simetria vai ser o coeficiente do *x*. Se nós não pusermos [o monómio de primeiro grau na representação algébrica], o eixo de simetria vai ser o eixo das ordenadas

A Marta consegue obter uma parábola que tem por eixo de simetria o eixo dos *YY* e a abordagem que ela faz parece constituir uma forma alternativa na determinação do eixo de simetria.

Na resolução de inequações, a Marta utiliza a representação gráfica comparando as imagens dos dois gráficos envolvidos. Assim, ao comparar os gráficos da figura 5.11, ela considera que *g(x)* é sempre menor do que *f(x)* justificando tal facto com base na posição que as imagens ocupam:

> [Eu acho que é sempre menor] porque o valor das imagens é sempre menor. Porque aqui o vértice da parábola [definida por *g(x)*], que neste caso é o ponto mais alto tem um valor menor do que o vértice desta parábola [definida por *f(x)*], que é o valor mais baixo

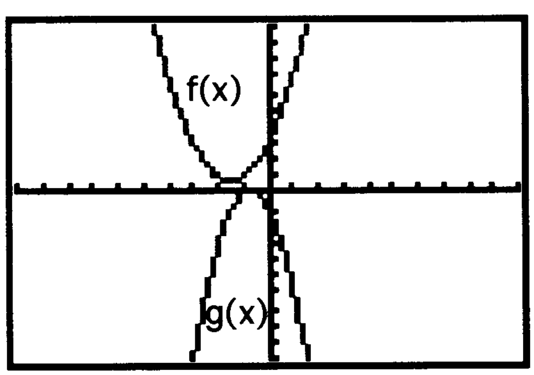


Figura 5.11

Em resumo, a noção de simetria parece ser importante para a Marta na interpretação de representações gráficas de funções quadráticas. Ela utiliza esta noção quando pretende justificar o gráfico da função módulo, considerando que o eixo dos *XX* funciona como eixo de simetria. Outra situação que envolve simetria está relacionada com o gráfico da própria parábola, que tem um eixo de simetria, e onde a Marta consegue desenvolver um método próprio que lhe permite obter parábolas que tenham por eixo de simetria o eixo dos *YY*. Quando se trata de comparar gráficos que não apresentam pontos de intersecção, ela parece utilizar o eixo dos *YY* como forma de estabelecer a comparação entre as imagens das duas funções. É com base no valor destas imagens que ela decide qual das funções é maior e qual é menor.

No grupo Delta, o estudo do sinal da função quadrática é feito a partir da sua representação gráfica. Assim, ao pretender estudar o sinal da função da figura 5.7, o Bruno utiliza a representação gráfica do ecrã do computador e conclui que "[ela é positiva] de dois a mais infinito e de menos infinito a menos três [e é negativa] entre menos três e dois".

Embora não utilize explicitamente a noção de simetria, a Joana parece considerar que ela está envolvida na representação da função módulo. Ao pretender justificar como fica o módulo da função representada na figura 5.7, ela argumenta que "isto [parte do gráfico que se situa abaixo dos eixo dos XX] sobe tudo para cima (...) a parte negativa passou a positiva". Quando se trata de identificar o vértice da parábola referida anteriormente, a Joana e o Bruno fazem uma abordagem gráfica e acabam por confundir a ordenada do vértice com o ponto onde o gráfico intersecta o eixo das ordenadas. Assim, a Joana considera que o valor menos seis "é o vértice" ao que o Bruno se opõe dizendo que não. No entanto, ele volta a olhar para o gráfico e dá razão à Joana. Este tipo de resposta parece ser condicionada pelo facto de, na representação gráfica, o vértice se situar muito próximo da sua intersecção com o eixo das ordenadas.

Ao interpretar o domínio e contradomínio, o Bruno recorre à representação gráfica. Ao traçar o gráfico da função $y=x^2-3$ ele argumenta, olhando para o gráfico, que:

B- O domínio é $\Re$.

Ent- E o contradomínio?

B- É de mais infinito a menos três.

A leitura do domínio e contradomínio ao ser feita com base no gráfico do ecrã do computador revela que o Bruno consegue articular estas noções com a representação gráfica.

Bruno estabelece uma relação de desigualdade entre os gráficos da figura 5.12 considerando que o gráfico de *g(x)* é maior do que o de *f(x)* "[quando o computador traça o gráfico de *g(x)* ele afirma] cá está, só que é maior [do que o gráfico de *f(x)*]".

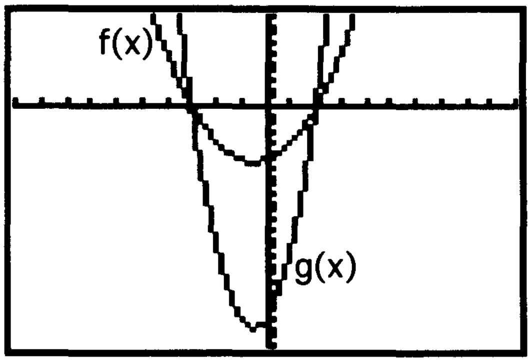


Figura 5.12

O Bruno parece estar a fazer uma abordagem visual e global dos dois gráficos, estabelecendo entre eles uma relação de grandeza que parece ser condicionada pelo facto de *g(x)* ter por contradomínio um conjunto que contém o contradomínio de *f(x)*.

Ao resolver a inequação $f(x)>g(x)$ (figura 5.12) o Bruno utiliza a representação gráfica e considera que "[A solução] é aqui neste intervalo, de... menos três a dois aberto dos dois lados". Também é a partir da interpretação dos gráficos de $y=x^2$ e $y=-x^2$ que a Joana e o Bruno consideram que o ponto (0,0) é o único ponto de intersecção de ambos e resolvem a inequação $-x^2>x^2$ concluindo que a primeira nunca é maior do que a segunda "é sempre menor ou igual".

Na interpretação de pontos no ecrã do computador, situados sobre os eixos coordenados, o Bruno considera apenas uma das suas coordenadas e toma-a em valor absoluto. Ao considerar o ponto de intersecção com o eixo das ordenadas da função $y=(x-2)(x+3)$ (figura 5.7), ele utiliza a representação gráfica para argumentar que:

B- [O gráfico corta o eixo] das ordenadas... Corta no ponto seis.

Ent- Seis?

B- Menos seis, menos dois vezes três dá menos seis.

Ent- Porque é que é menos seis?

B- Está no gráfico e também menos dois vezes três vai dar [menos seis].

Ele corrige a resposta considerando que é o "ponto" menos seis a partir da análise simultânea das representações algébrica e gráfica.

Em resumo, o Bruno utiliza a representação gráfica da função quadrática como forma de estabelecer as suas principais características. Ele estuda o sinal da função a partir da representação gráfica, conseguindo estabelecer o conjunto solução na forma de intervalo real. As noções de menos e mais infinito não parecem causar problemas, conseguindo sempre ser interpretadas de forma correcta. Da mesma forma ele consegue decidir o domínio e contradomínio bem como estabelecer a comparação entre duas funções, o que lhe permite definir o conjunto solução de equações e inequações. O facto de o Bruno utilizar, com alguma frequência, os gráficos para decidir acerca das propriedades das funções, leva a que, por vezes, eles sejam interpretados de uma forma global. Esta abordagem conduz a situações em que o eixo de simetria da parábola é confundido com o eixo das ordenadas, por ambos se encontrarem muito próximos ou devido a problemas com a visualização do gráfico. Na identificação dos pontos que se situam sobre os eixos,o Bruno considera apenas a coordenada que não se anula e, por vezes, refere-se a ela em valor absoluto. A Marta utiliza a noção de simetria quando pretende explicar o que se passa com a representação gráfica do módulo de uma parábola, simetria esta que é referida ao eixo dos *XX*. Tal como o Bruno, ela também faz uma interpretação global dos gráficos tirando conclusões apenas com base na representação gráfica que é visível e não discutindo a sua validade para além da representação visual.

4 - Tradução entre diferentes representações de funções

Nesta secção pretende-se caracterizar a forma como os alunos integram as diferentes representações do conceito de função num ambiente computacional e, em especial, como efectuaram a tradução entre elas. Serão abordadas as representações algébrica, gráfica e pontual. Mais concretamente pretende-se caracterizar os processos que os alunos utilizam para passar da representação algébrica para a gráfica, da representação pontual para a algébrica e da gráfica para a algébrica. Ao abordar estas traduções serão referidos episódios onde os alunos utilizam de uma forma integrada as diferentes representações. Foi difícil isolar cada uma das representações, acabando os alunos por fazer, em determinadas situações, uma utilização simultânea destas.

4.1 - Tradução da representação algébrica para a gráfica

Dada a natureza do ambiente computacional em que os alunos estavam a trabalhar, eles apenas podiam visualizar a representação gráfica de funções depois de introduzirem no computador a sua expressão analítica e traçarem o gráfico respectivo. A representação algébrica aparece pois como um pré-requisito à representação gráfica.

Verificou-se, entretanto, que os alunos utilizam elementos da sua representação visual da função para adequarem a representação algébrica ao gráfico pretendido. A representação algébrica e gráfica aparecem, pois, bastante interligadas.

4.1.1 - O caso da função afim

No caso da função afim os alunos destacam o papel das constantes *a* e *b*, da representação algébrica geral $y=ax+b$, para traçar os gráficos pretendidos. Tal como já foi referido na secção anterior, onde foram abordadas as representações algébrica e gráfica, os coeficientes *a* e *b* desempenham um papel importante, sendo a constante *a* associada com a inclinação das rectas e a sua monotonia, enquanto que a constante *b* é relacionada com a ordenada na origem. Algumas vezes, o ponto de intersecção do gráfico com o eixo dos *XX* também é considerado.

No grupo Alfa as constantes *a* e *b* da representação $y=ax+b$ são utilizadas consoante o tipo de gráfico que se pretende traçar. Quando foi pedido à Susana e ao Ricardo para representar funções do tipo $y=ax$,eles acabam por introduzir $y=3x$, *y=2x, y=4x*, funções onde a constante *a* é sempre inteira e positiva. Quando se pretende saber o que acontece se os valores de *a* aumentam, o Ricardo afirma que "[a recta] fica mais junto ao eixo dos *YY*". Ele parece relacionar os valores da constante *a* com a inclinação da recta. Mais tarde, a Susana também refere a influência do *a*. Para justificar que não se consegue obter uma representação algébrica de uma função afim cujo gráfico seja uma recta vertical, a Susana argumenta:

> Se a gente der valores a *a* nunca conseguimos obter uma recta vertical porque nunca conseguimos fazer que todos os objectos tenham imagem zero, porque aquilo nunca pode dar zero, porque o *a* tem um valor... não é?

No caso de *a* ser zero, com *b* também nulo, a Susana parece interpretar as representações algébrica e gráfica em separado, não as conseguindo relacionar. Por exemplo, ela considera que quando *a* e *b* são zero "fica uma recta ali coincidente com o eixo das abcissas... horizontal", mas "não sei bem [se é uma função]... [Porque] não existem imagens (...) o objecto é sempre zero e a imagem é sempre zero... isso vai anular a função". A Susana parece viver um conflito entre a representação algébrica e a gráfica. A representação algébrica *y=0x*, isto é, *y=0*, parece indicar que a função se resume apenas a um ponto, o ponto (0,0). A representação gráfica mostra-lhe que uma função com estas características é uma recta coincidente com o eixo dos *XX*.

Quando foi perguntado à Susana o que acontece quando o *a* é negativo, ela pediu inicialmente ao Ricardo para introduzir a função *y=-x*. Só depois de o gráfico aparecer no ecrã é que concluiu que "a recta vai ser decrescente [porque] o valor do coeficiente do *x*, o *a*, vai influenciar (...) a função". A Susana parece preferir a representação gráfica para concluir acerca da influência da constante *a* quando esta é negativa.

A constante *b* é utilizada quando se pretende obter gráficos de rectas que sejam paralelas. A Susana considera que estes gráficos são representados por funções constantes, admitindo que o *a* é zero "portanto o objecto pode ir variando mas a imagem é sempre a mesma. Por exemplo traçar uma recta... assim ... aqui [indica o ponto de ordenada dois no sistema de eixos representado no ecrã do computador], dois. Qualquer que seja o objecto a imagem é sempre dois". Quando se pretende que eles tracem outras rectas não horizontais que sejam paralelas, a abordagem que a Susana faz tem por base a representação algébrica que foi predominantemente abordada nas aulas "portanto assim duas paralelas... é preciso que tenham o mesmo valor do *a*, salvo erro. Não sei. Acho que o valor do *a* tem que ser o mesmo e só varia o valor do *b*". A Susana faz uma abordagem algébrica baseada na influência das constantes e só posteriormente é que faz a interligação desta com a representação gráfica quando traça o gráfico de duas destas rectas.

Também quando é pedido à Susana e ao Ricardo para traçar uma recta que intersecte a parábola representada abaixo (figura 5.13) eles consideram a influência do *b* e introduzem a função $y=-2x+1$, representada na figura 5.13, que visualmente aparece como tangente à parábola. Optam então por representar $y=-2x+5$ (figura 5.14) que a Susana tem a certeza de intersectar a parábola, pois o valor do termo independente, *cinco* é o ponto de intersecção com o eixo dos *YY* que também é o ponto onde a parábola corta este eixo "$-2x+1$... [traçam o gráfico]. Ou então mais *cinco,* porque o *b* é quando o objecto é zero, *b* é a ordenada". A escolha da expressão algébrica para representar a segunda recta parece ser feita com base na representação gráfica, conseguindo a Susana fazer uma interpretação das duas representações em simultâneo. A interpretação gráfica parece ser determinante na escolha dos coeficientes por forma a que a segunda recta seja paralela à primeira.

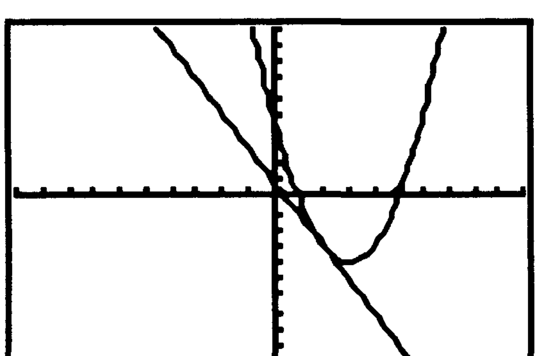


Figura 5.13

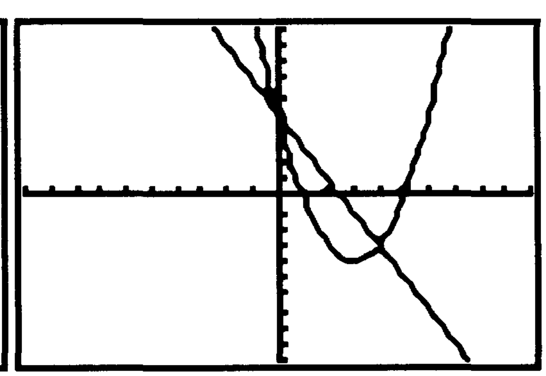


Figura 5.14

Ao pretender traçar uma recta que passe pelo ponto de coordenadas (0,-2), o Ricardo também tem em consideração o papel da constante *b*:

Ent- Vamos tentar representar rectas que passem pelo ponto de coordenadas (0,-2)... Como é que serão essas rectas?

R- Temos que dar a b o valor menos dois.

Ent- Então tentem traçar algumas.

R- *3x-2*, pode ser (...) [traçam o gráfico]. Então ali é dois e meio, [indica o ponto no computador] depois passa no menos dois, não é? [como a escala do sistema de eixos do computador tem por unidade dois,cinco, o Ricardo está a confirmar o ponto onde o gráfico corta o eixo].

O Ricardo estabelece assim uma correspondência entre a constante *b* e a ordenada do ponto dado, procedimento este que tinha sido desenvolvido ao longo das aulas e que parece assumir um estatuto proposicional.

Por vezes, a Susana apresenta alguma dificuldade em relacionar a representação algébrica e gráfica. Quando pretende traçar uma recta que passe pelo ponto de coordenadas (2,0), ela identifica a posição do ponto em causa no sistema de eixos representado no computador e faz uma interpretação gráfica da situação desenhando no papel um gráfico como o da figura 5.15.

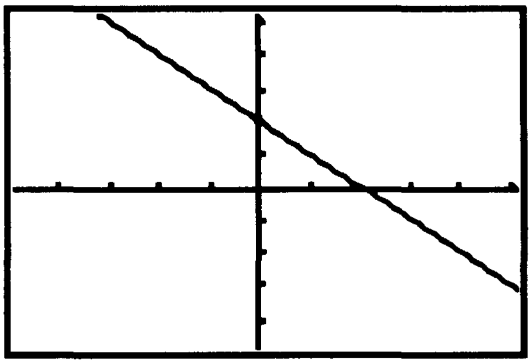


Figura 5.15

Quando pretende estabelecer a sua representação algébrica, acaba por recorrer, com o auxílio do entrevistador, à influência das constantes *a* e *b*:

Ent- Vamos começar a editar essa função. Portanto o *a* é negativo...

S- Menos um ... [vezes] *x*.

Ent- Portanto *-x*. E agora como é que vai ser o *b*?

S- Dois (...). Então nesse caso era mais dois, menos dois mais dois dá zero .... Mas o *x* depois pode dar outros valores...

Ent- Experimenta lá mais dois.

(...)

R- $-x+2$?

Ent- Sim.

S- Mas depois se o *x* variar já não pode ser o mais dois. Por exemplo, menos três mais dois é menos um ...

A Susana consegue assim definir ambas as representações, a algébrica e a gráfica. No entanto, não consegue fazer a tradução entre elas por forma a verificar que ambas representam a mesma função. Ela parece ter alguma dificuldade em relacionar o ponto dado com a representação algébrica que obteve. Posteriormente, ela consegue fazer a distinção entre os elementos do domínio da função e a abcissa do ponto dado, argumentando que:

> Pois é só naquele ponto. Eu estava a fazer confusão, eu estava a pretender que todos os valores de *x* fossem dois. (...) Esqueço-se sempre que tenho que concretizar o *x*, que a gente vai sempre taçar muitos valores para *x* ... Pois a gente tem que pensar que temos ali um valor de *x* que é dois.

Tal como já tinha acontecido anteriormente, a Susana parece viver um conflito entre a representação algébrica e gráfica, conseguindo definir graficamente a função pretendida, mas tendo algumas dúvidas sobre se a representação algébrica traduz o gráfico traçado anteriormente. Quando se pede mais uma função que passe por aquele ponto a Susana utiliza um raciocínio algébrico servindo-se da concretização da variável independente:

S- Uma positiva [isto é, função crescente], por exemplo ... *3x*...

(...)

Ent- Então quanto é que tem que ser o *b*?

S- Então substituindo o *x* por dois [dois vezes três] tem que ser menos seis

Ent- Menos seis, concordas [Ricardo], ou não?

S- Seis menos 6 dá zero.

A Susana utiliza o termo *função positiva* como sinónimo de *função crescente* e acaba por encontrar a expressão analítica atribuindo um valor à constante *a* e concretizando a variável para obter o valor cujo simétrico irá atribuir a *b*. Ela parece ter conseguido desenvolver um processo que lhe permite, por resolução algébrica, encontrar as expressões analíticas de rectas que passam por um ponto que se situa sobre o eixo das abcissas. Este processo parece não ser utilizado quando pretende traçar rectas que passem pelo ponto de coordenadas *(-3,0)*:

R- Fazes por exemplo *-x -6* dava [para definir a função pretendida].

Ent- Experimentem lá então a traçar.

S- Não. *-x+6*. Não *-x-6*.

R- *-x-6*, porque nos outros alternava, aqui não.

O Ricardo ao considerar que a representação algébrica *-x-6* serve, parece estar apenas a considerar o sinal dos dois monómios. A Susana parece estar a fazer uma comparação com o sinal da representação anterior sugerindo que os monómios tenham sinais contrários. O Ricardo parece fazer uma interpretação mais global da situação quando considera que o sinal está correcto, porque no caso anterior é que alternava. O Ricardo associa o sinal da constante *b* ao da abcissa do ponto por onde deve passar o gráfico. Este tipo de abordagem parece ser condicionado por outro tipo de actividades desenvolvidas inicialmente nas aulas, onde o valor e sinal do *b* era associado à ordenada do ponto de intersecção com o eixo dos YY. O facto de o gráfico não passar pelo ponto pretendido só é analisado a partir da representação gráfica da função e a Susana acaba por destacar o ponto onde o gráfico corta o eixo das ordenadas e não o das abcissas, como se pretendia: "está a passar no ponto menos seis, porque o *b* é menos seis". Após terem identificado qual era o zero da função que tinham traçado o Ricardo parece utilizar a mesma abordagem que tinha sido desenvolvida na actividade anterior e consegue definir duas representações algébricas possíveis: *y= -2x-6* ou *y= -x-3*.

O facto de o coeficiente do *x* ser negativo parece ser determinante neste tipo de expressões, pois quando se pede para representar outras que passem por este ponto o Ricardo sugere mais três, todas elas funções decrescentes. A escolha de funções crescentes que passem pelo mesmo ponto parece ter por base a noção de simetria, pois quando se pede uma que seja crescente ele acaba por indicar a simétrica de uma já representada anteriomente, *y= x+3*.

Em resumo, para a Susana, a tradução da representação algébrica para a gráfica é feita essencialmente com base nas características da representação algébrica e, por vezes, ela recorre à representação gráfica como forma de verificação das suas conjecturas. Assim, ela utiliza a representação algébrica fazendo essencialmente dois tipos de abordagem: utilização da influência das constantes *a* e *b* e a utilização de processos baseados no cálculo algébrico. Na abordagem que privilegia a influência das constantes, a Susana refere como características gráficas que podem ser atribuídas ao coeficiente *a*, a monotonia, a inclinação da recta e a obtenção de rectas paralelas não horizontais. O coeficiente *b* é interpretado como o ponto onde o gráfico corta o eixo das ordenadas e como determinante para obter rectas paralelas horizontais, quando o coeficiente *a* é nulo. A abordagem que privilegia o recurso ao cálculo algébrico é utilizada, pela Susana, quando pretende representar funções afins que passam por um ponto dado sobre o eixo das abcissas. Embora ela comece por discutir a influência das constantes *a* e *b* verifica que as suas propriedades em separado não servem para definir a função pretendida e opta por utilizar uma estratégia mais operacional, baseada no cálculo. Esta estratégia pressupõe a definição e concretização do monómio *ax*, sendo o valor de *b* encontrado a partir da concretização da variável *x* pela abcissa do ponto dado. Embora, na maior parte das situações, a Susana consiga fazer a tradução com êxito há algumas situações em que a representação algébrica e gráfica entram em conflito. Estas situações estão sobretudo relacionadas com a representação algébrica e provêm do facto de a variável independente não estar representada, como por exemplo a equação $y=0$.

O Ricardo tem uma intervenção mais moderada e apresenta uma abordagem mais centrada na influência das constantes da representação algébrica. Assim, ele associa à constante *a* a inclinação da recta e a *b* o ponto onde esta corta o eixo das ordenadas.

No grupo Beta a passagem da representação algébrica para a gráfica é baseada em pontos particulares como a ordenada na origem e os zeros da função. Ao pretender identificar os gráficos das funções $f(x)= 2x+4$, $g(x)= x-3$ e $h(x)= x+1$, já representados no computador, a Ana identifica o gráfico de $f(x)$ a partir do seu zero na representação gráfica "a primeira [refere-se a $f(x)$] é esta não é? [Indica o gráfico correctamente no computador]... passa pelo ponto dois [indica o ponto onde o gráfico corta o eixo dos *XX*, de abcissa menos dois]", embora não explicite o seu valor relativo adequadamente. Também quando a Ana pretende saber qual o gráfico que corresponde à função $g(x)$ ela identifica-o a partir do ponto de intersecção com o eixo das ordenadas "é a [recta] que passa pelo ponto menos três". O Rui, por sua vez, considera que a correspondência que a Ana estabeleceu entre as representações algébrica e gráfica de $f(x)$ está correcta, "porque as outras duas [rectas] são paralelas". Ele parece conseguir relacionar a representação algébrica e gráfica de rectas paralelas por forma a distingui-las das que lhe são concorrentes. Também anteriormente, quando lhes é pedido para representarem rectas paralelas, a Ana e o Rui acabam por identificar duas que já estavam representadas no computador, $y=-x$ e $y=-x+2$ resultantes de actividades que tinham desenvolvido anteriormente, conseguindo indicar as respectivas representações algébricas. Embora eles consigam identificar as rectas paralelas, já representadas graficamente, têm algumas dificuldades em estabelecer a expressão algébrica de uma terceira que seja paralela às anteriores. Assim, ao pretender definir a expressão algébrica desta recta, eles tentam encontrá-la por tentativa e erro acabando por introduzir a expressão $y=-2x+4$. O Rui e a Ana parecem ter confundido os objectivos desta actividade com os da anterior que consistia em obter rectas que tinham o mesmo zero. A partir de uma análise mais cuidada da representação algébrica, a Ana chegou à conclusão de que "o que elas têm que ter em comum [é], para já, o sinal do coeficiente do *x*", e o Rui, após algumas tentativas para representar a recta pretendida, chegou à conclusão de que "elas têm que ser todas do tipo menos *x* mais... ou menos *b*". Eles conseguem assim fazer uma generalização com base na representação algébrica que lhes vai permitir definir a família das rectas que eram paralelas àquela que já tinham representado anteriormente.

Por vezes, a passagem da representação algébrica para a gráfica é também baseada em processos algébricos. Assim, quando pretende representar graficamente uma recta que passe pelo ponto de coordenadas (0,-2), a Ana propõe:

A- $x+2$. Ah! $x-2$. Não...

Ent- $x-2$. Será que $x-2$ também passa pelo ponto (0,-2)?

A- Quando o *x* toma o valor de zero ... [Rui traça o gráfico]

A Ana fica um pouco indecisa acerca da representação algébrica e acaba por recorrer à concretização da variável para confirmar se a recta passa no ponto pretendido. Também noutra situação a Ana utiliza a resolução algébrica para confirmar se as rectas definidas por $y=x-2$ e $y=3x-2$ passam pelo mesmo ponto:

Ent- Esta aqui [indica o gráfico no ecrã do computador] é $x-2$, se fosse $3x-2$ o que é que ia acontecer?Ela continuava a passar neste ponto [(0,-2)] ou não?

A, R- $3x-2$, não.

Ent- Será que não?

A- Porque $3x$, por exemplo, se *x* fosse zero era três menos dois ia dar um.

A Ana tem alguma desatenção ao efectuar a resolução algébrica e não procura relacionar esta representação com a gráfica por forma a confirmar a sua conjectura. Também quando se pretende representar graficamente uma função afim que passe pelo ponto de coordenadas (2,0), a Ana identifica o ponto dado como sendo o zero da função e quando o Rui considera que o *b* tem que ser dois, ela faz uma interpretação algébrica da expressão resolvendo a equação *x+2=0*. Como verifica que o seu zero é menos dois, decide que a expressão tem que ser *x-2*. O mesmo tipo de raciocínio algébrico é feito pela Ana quando se pede para representar outra recta que passe pelo mesmo ponto. Assim, quando o Rui afirma que pode ser "*-x-2*", a Ana argumenta que não pode ser, porque "fica menos *x* igual a dois, *x* é igual a menos dois", e conclui que pode ser "*-x+2*".

Em resumo, na tradução da representação algébrica para a gráfica, a Ana faz uma abordagem baseada em processos algébricos. Assim, quando pretende encontrar uma representação algébrica que defina um gráfico com características determinadas, ela estabelece uma expressão analítica e, posteriormente, vai concretizar a variável independente por forma a verificar se a função passa ou não nos pontos pretendidos. Ao estabelecer a expressão analítica anterior, a Ana parece utilizar a influência das constrantes *a* e *b* da expressão algébrica geral, no entanto nunca explicita este tipo de raciocínio. Quando pretende relacionar várias representações algébricas com os respectivos gráficos representados no ecrã do conputador, a Ana utiliza como estratégia a identificação de alguns pontos particulares como, por exemplo, as intersecções com os eixos coordenados, parecendo estar subjacente a esta estratégia uma abordagem baseada em processos algébricos. O Rui também consegue identificar as expressões algébricas e os gráficos correspondentes desde que ambas as representações estejam presentes. O facto de conseguir relacionar as representações algébrica e gráfica, em presença de ambas, não parece contudo ser suficiente para que possa haver a tradução entre elas. Quer a Ana quer o Rui, depois de terem identificado ambas as representações de rectas paralelas, reveleram dificuldades em definir uma terceira recta paralela às anteriores.

No grupo Gama é com base nas constantes *a* e *b* da expressão algébrica geral que eles definem as representações gráficas pretendidas. Quando foi pedido para traçarem gráficos de funções do tipo *y=ax*, a Marta chegou à conclusão que "têm que passar todas pela origem, pois... o *b* é zero". Também quando referia o caso em que o *a* era zero e o *b* diferente de zero, a Marta afirmou que "nesse caso o que temos é rectas paralelas ao eixo dos *XX*". O coeficiente *b* é pois interpretado como sendo a ordenada na origem. Em ambas as situações anteriores a Marta conseguiu fazer a tradução da representação algébrica para a gráfica apenas com base na algébrica, revelando assim uma facilidade mental de comparação das duas representações.

Ao interpretar o coeficiente *a* em funções do tipo $y=ax$, a Marta e o João atribuem-lhe preferencialmente valores positivos e negativos. Assim, ao concretizarem o *a* introduzem três funções $y=2x$, $y=\frac{1}{3}x$ e $y=-x$, faltando apenas o caso em que a função é constante. Neste caso o *a* e o *b* são zero e a Marta acha que continuamos a ter uma função cujo gráfico está coincidente com o eixo dos *XX*: "ficamos só com o eixo dos *XX*... quer dizer ficamos com os valores correspondentes ao eixo dos *XX*". A generalização do tipo de gráficos que se obtêm a partir da representação algébrica $y=ax$ não parece causar dificuldades aos elementos deste grupo, acabando mesmo por serem interpretados como definindo uma proporcionalidade directa "passam todas pela origem, crescem quando o coeficiente do *x* é positivo e há proporcionalidade directa". A monotonia também é associada com o *a*, mas apenas é referida quando este é positivo. A constante *b* volta a ser utilizada pela Marta quando pretende definir uma função afim que passe pelo ponto de coordenadas (0,-2). Assim, ela afirma que "[o] *b* vai ser igual a menos dois e para passar pelo zero... (...) Vai ser $x-2$ [traçam o gráfico no computador]". A Marta parece estar a recorrer à abordagem feita nas aulas onde o *b* foi interpretado como sendo a ordenada na origem e consegue assim representar uma das rectas pretendidas. Quando lhe é pedido para representar outras rectas que passem pelo mesmo ponto, ela continua a utilizar o mesmo raciocínio acabando por conseguir definir mais três representações algébricas que definem os gráficos pretendidos.

Noutras situações, para além da influência das constantes *a* e *b*, os elementos do grupo utilizam estratégias que passam pela interligação das duas representações e pelo recurso à resolução algébrica, como forma de definir os gráficos pretendidos. Assim, ao pretender representar algebricamente uma função afim que passe pelo ponto de coordenadas (2,0), a Marta recorre a um estratégia essencialmente gráfica:

M- Ah, já sei .... Temos que arranjar um valor algures no eixo das ordenadas a que corresponde a imagem dois ...

J- Que corresponde a dois.

M- Corresponda já a imagem ao objecto dois. Temos que arranjar a imagem do objecto dois.

Este raciocínio parece estar relacionado com a actividade anterior onde se pretendia traçar uma recta que passasse por um dado ponto do eixo dos *YY*. Esta interpretação parece causar algumas dificuldades na identificação dos objectos e imagens, acabando por não chegar a ser referida explicitamente qual era a imagem do objecto dois que se pretendia encontrar. Após uma leitura mais atenta das coordenadas do ponto e depois da sua visualização no ecrã do computador, a Marta consegue chegar à conclusão de que este é o zero da função e tenta definir a expressão analítica fazendo uma interpretação algébrica:

M- [Este ponto] é o zero da função. Temos que ir igualar a zero... a dois ... ou sim a zero ... porque é o zero. ax+b .... hum... *2x* ... *2x* ... é capaz de ser menos dois .... *x-2* [traçam]

Ent- O que é que acham?

M- Tem abcissa dois e ordenada zero.

A Marta recorre à resolução algébrica da equação como forma de definir a expressão analítica que tem por zero o valor dois e depois de traçar o gráfico consegue identificar o ponto com as suas coordenadas. Quando é pedido outro gráfico que passe pelo mesmo ponto o João sugere que se introduza *y=x+2* . No entanto, a Marta faz uma interpretação gráfica concluindo que esta representação não serve:

Ent- [Tracem] outro gráfico que passe pelo ponto (2,0).

J- *x+2.*

Ent- Será? Mas *x+2* serve?

M- *-x+2* ... hum é possível.

J- E não é *x+2*?

M- *x+2* vai passar por aqui João [indica a parte negativa do eixo dos *XX*]

Ent- Vai passar por onde?

M- Vai passar pelo ponto dois do eixo das ordenadas ... aqui é dois.

A Marta faz a interpretação gráfica a partir da expressão algébrica que o João sugeriu conseguindo identificar os pontos onde ela corta os eixos coordenados, com especial destaque para o eixo das ordenadas. Ao tentar encontrar outra função que passe pelo mesmo ponto, a Marta tenta representar uma que segundo ela é uma recta horizontal:

Ent- Outra ainda que passe também pelo mesmo ponto?

M- *x*

Ent- *x*... *x* passa?

M- Passa.

Ent- *x*? Como?

M- *x*... *x* vai-se sobrepor [indica o eixo dos *XX* no ecrã do computador]

Ent- Que? $y=x$?

M- Sim, vai dar é o eixo das abcissas.

A Marta parece estar a considerar que há uma recta horizontal que passa pelo ponto de coordenadas (2,0), que concorda ser definida algebricamente por $y=x$. Embora noutros contextos este tipo de representação seja correctamente interpretado, ela parece estar a fazer uma análise global considerando que todos os objectos têm imagem zero. Para além da abordagem algébrica ela parece ter uma representação visual da situação ao pretender justificar que uma recta coincidente com o eixo das abcissas passa pelo ponto de coordenadas (2,0).

Quando se pede para representar ainda mais uma recta que passe por este ponto, a Marta utiliza uma explicação algébrica que pressupõe a resolução da equação e sugere que $y=3x-5$ serve. Ela parece estar a resolver a equação $3x-5=0$ supondo que é a diferença entre cinco e três que vai dar dois e não o quociente. Por fim, conclui que o seu erro se deveu ao facto de estar a "fazer com outra proporcionalidade". Na análise algébrica, ela parece preferir a resolução da equação em detrimento da concretização da variável independente, como forma de verificar se a expressão analítica satisfaz as condições pretendidas. Quando se pretende fazer uma generalização da expressão algébrica que representa gráficos que têm um determinado zero, positivo, a Marta chega à conclusão de que o zero resulta do quociente entre o *b* e o *a* e que estes têm que ter sinais opostos "o zero é igual ao quociente entre o *b* e o *a* (...) e eu também acho que o *a* e o *b* tem que ser de sinais opostos". Este tipo de argumentação parece confirmar o facto de a Marta utilizar a resolução algébrica como forma de definir as rectas pretendidas.

Ao pretender representar um gráfico que passe pelo ponto de cordenadas *(-3,0)* o João recorre às representações anteriores utilizando-as como modelo:

Ent- [Representem rectas que] passem no ponto (-3,0).

(..)

J- Mete lá *3x-9.*

M- Não... Vai ser mais trêsou menos três...?

Ent- (-3,0)

M- Vai ser mais nove. Sabes porquê, João? Porque olha, repara, isto *[3x+9]* tem que ser igual a zero. Menos nove passa para aquele lado, tem que dar menos três, vai ser menos nove terços vai dar menos três

J- Sim.

M- Neste caso tem que ser ... Têm que ter sinais iguais.

A Marta volta a utilizar a resolução da equação para justificar que a expressão algébrica terá que ser $3x+9$, o que lhe permite também concluir quais os sinais dos dois monómios. A Marta parece estar a tentar encontrar uma forma de generalizar o sinal deste tipo de expressões. O recurso à representação algébrica simétrica é a forma que utilizam para representar outra função que passe pelo mesmo ponto, acabando por definir a função $y=-3x-9$. Posteriormente, parece ser estabelecida uma relação entre as constantes a e b, conseguindo representar mais duas que também definem funções decrescentes $y=-4x-12$ e $y= -x-3$. Neste tipo de actividade a abcissa do ponto parece ser utilizada como constante de proporcionalidade entre as constantes a e b. Assim, ao tentar fazer a generalização do sinal de a e de b, a Marta acaba por referir-se às abcissas dos pontos como sendo os objectos "Quando a imagem... Quando o objecto é negativo o a e o b têm o mesmo sinal. Quando o objecto é positivo o a e o b têm sinais diferentes".

Em resumo, ao fazer a tradução da representação algébrica para a gráfica, a Marta utiliza essencialmente dois tipos de estratégias: uma baseada na influência das constantes a e b e outra baseada na utilização de processos algébricos. Na abordagem que privilegia a influência das constantes, a Marta consegue indicar as propriedades dos gráficos apenas com base na representação algébrica, o que parece indicar que ela apresenta uma boa compreensão da influência destas constantes na representação gráfica. Neste tipo de abordagem, a Marta identifica sobretudo os pontos de intersecção do gráfico com o eixo das ordenadas, determinado pelo b, a existência de rectas horizontais, quando a é nulo, e a monotonia da função que é associada com o sinal do a. A abordagem que privilegia os processos algébricos é mais utilizada quando se trata de definir funções que passam por um ponto dado sobre o eixo das abcissas. Neste tipo da abordagem a Marta utiliza vários processos. Por vezes, recorre à resolução da equação $ax+b=0$ tentando definir posteriormente valores para *a* e *b* por forma a que o objecto dois tenha por imagem zero. Noutras situações, quando o João propõe uma expressão algébrica, recorre à concretização da variável independente para verificar se o ponto dado é ou não zero da função e a par desta abordagem também há situações em que procura as características gráficas da expressão como forma de verificação.

No grupo Delta, a passagem da representação algébrica para a gráfica é feita com base nos gráficos que são muitas vezes obtidos sem que seja discutida, à priori, a influência das constantes *a* e *b* da expressão algébrica. Tal facto, parece dever-se à facilidade que o Bruno tem em introduzir e traçar os gráficos no computador. Assim, quando a Joana procura discutir a influência das constantes, já o Bruno traçou um gráfico, sendo posteriormente a partir desse que é discutida a situação proposta. No entanto, o Bruno recorre às constantes *a* e *b* quando pretende traçar rectas paralelas, embora apenas as refira explicitamente quando tenta justificar os gráficos traçados. Ele considera que para poder traçar duas rectas paralelas elas têm que ser horizontais e traça duas com o coeficiente *a* nulo. Quando lhe é pedido para representar outras duas que não sejam horizontais ele traça $y=2x$ e $y=2x+2$ e recorre à representação algébrica discutindo a influência das constantes nos gráficos que traçou:

> Hum... é assim parece [traça os gráficos no computador]. São duas paralelas. Se mudasse o coeficiente do *x* ela inclinava-se. Portanto, não podia ser.

Ele acaba assim por explicitar a forma como as expressões algébricas foram construídas, com base nas constantes *a* e *b.*

Quando se pretende representar graficamente funções afins que passem pelo ponto de coordenadas (0,-2), o Bruno volta a fazer uma interpretação gráfica que posteriormente concretiza ao introduzir duas funções que passam pelo ponto pretendido:

> Ent- Agora outra que passe por este ponto.
>
> B- Que passe pelo mesmo ponto...
>
> Ent- Esta *[y=-2]* é uma delas, não é? É uma horizontal. Agora uma que não seja horizontal?
>
> B- São assim [simula uma recta oblíqua com o dedo no ecrã do computador].
>
> Ent- Sim. Como é que deve ser a expressão da função?

B- O *b* tem que ser menos dois, que é para passar pelo menos dois... [traçam *y=2x-2]*. Também passa. (...) E *x-2* também.

Assim, o Bruno consegue simular rectas que passam pelo ponto dado e quando pretende definir a expressão algébrica considera a influência do coeficiente *b* fazendo-o corresponder à ordenada do ponto. Ele parece estar a utilizar este procedimento de uma forma proposicional, por ter sido o tipo de abordagem que foi feito na aulas.

Quando se pretende traçar gráficos de funções afins que passem pelo ponto de coordenadas (2,0), o Bruno utiliza uma estratégia de tentativa e erro, recorrendo preferencialmente à representação gráfica. Ele parece começar por estabelecer uma correspondência entre as coordenadas do ponto e as constantes *a* e *b* introduzindo a função *y= 2x* e traça o respectivo gráfico. Ao verificar que este não passa pelo ponto dado ele edita a função *y= 2x-2* e acha que esta já vai passar nesse ponto:

B- *2x-2* já vai lá ter [refere-se ao ponto de coordenadas (2,0)].

Ent- Esta está a passar em que ponto?

J- No zero e menos dois.

B- Está a passar no dois.

J- No zero e no menos dois.

Embora o ponto em causa esteja situado no eixo das abcissas, o Bruno refere-se à intersecção com o das ordenadas e acaba por considerar o valor da ordenada em valor absoluto. A Joana também considera o ponto de intersecção com o eixo das ordenadas, interpretando-o correctamente. Este tipo de abordagem parece dever-se ao facto de eles estarem a relacionar, em simultâneo, as representações algébrica e gráfica sendo o ponto em causa mais facilmente visualizado por ser possível identificá-lo com o *b* da expressão algébrica, uma vez que a escala definida no sistema de eixos tinha por unidade dois,cinco. A identificação do zero da função anterior como sendo o ponto (1,1) leva a Joana a sugerir que o *b* tem que ser alterado para menos quatro e acabam por traçar o gráfico de *y=2x-4*. Quando se pede para traçarem o gráfico de uma função decrescente que passe pelo mesmo ponto, o Bruno parece associar a monotonia com o sinal do coeficiente do *x* e acaba por traçar *y=-x-2*. Após ter traçado o gráfico facilmente chega à conclusão de que a expressão tem que ser *y=-x+2*.

Em resumo, ao fazer a tradução da representação algébrica para a gráfica, o Bruno não explicita directamente os procedimentos que o levam a definir uma dada representação algébrica e acaba por explicar esses procedimentos com base na representação gráfica. Embora, por vezes, ele pareça utilizar uma estratégia de tentativa e erro, remediada a partir da interpretação dos gráficos traçados, há situações em que se pode constatar a utilização da influência das constantes *a* e *b*. Assim, quando pretende traçar rectas paralelas, ele utiliza a influência de ambas as constantes, conseguindo relacioná-las correctamente. A constante *a* também é referida como forma de interpretar a inclinação das rectas e de representar rectas horizontais. A constante *b* é considerada como definindo a ordenada na origem.

4.1.2 - O caso da função quadrática

No caso da função quadrática os alunos utilizam as constantes para tentar descrever a sua representação gráfica tal como o fizeram nas funções afins. Tendo por base a representação algébrica que foi abordada nas aulas $y=ax^2+bx+c$, a constante *a* é utilizada para definir o sentido da concavidade da parábola. O coeficiente *c* é interpretado como a ordenada do ponto de intersecção da parábola com o eixo dos *YY*. Outro tipo de representação algébrica que os alunos utilizam, e que não foi abordado formalmente nas aulas, refere-se à equação $y=(x+a)(x+b)$, onde surgem maiores dificuldades na sua manipulação e onde os termos independentes de cada um dos monómios são identificados com os zeros da função.

No grupo Alfa a passagem da representação algébrica para a gráfica é influênciada essencialmente pela constante *a*. Assim, ao pretender traçar o gráfico de duas parábolas com concavidades de sentidos opostos, a Susana propõe a introdução de polinómios completos do segundo grau associando o sentido da concavidade ao coeficiente de x^2: "[uma das parábolas] tem a concavidade virada para cima porque o coeficiente do x^2 é positivo". Esta conclusão tem por base a interpretação algébrica pois ainda não tinham sido traçados os gráficos no computador.

Por vezes, a obtenção da expressão algébrica tem por base as famílias de funções e não as próprias funções, evidenciando assim a influência das constantes. Ao pretenderem representar uma parábola que tenha por contradomínio o conjunto dos números reais positivos incluindo o zero, o Ricardo e a Susana consideram que:

S- Então, talvez a [parábola] mais simples seja ...
R- ax^2+bx, e depois...
S- pode ser só ax^2. Portanto $2x^2$.

O Ricardo parece estar a utilizar uma abordagem algébrica admitindo que o facto de o x ser zero satisfaz a condição imposta, pois a função anula-se. A Susana parece preferir a representação mais simples, estando o vértice da parábola no ponto (0,0). Esta representação parece ser determinante para definir o contradomínio pretendido, pois quando pretende justificar quantas parábolas é que podiam ser representadas com este contradomínio, ela afirma que "[podíamos representar] as que nós quisessemos, bastava fazer variar o valor do *a*". Ela parece considerar apenas todas as que pertencem a esta família. Embora o Ricardo tenha revelado uma abordagem algébrica desta mesma situação, ao pretender representar uma parábola que tenha por contradomínio o intervalo $[0, +\infty[$, ele faz uma abordagem gráfica ao sugerir que "tem que ser uma assim [indica o gráfico do módulo de uma parábola que está representada no computador]". Também quando se pretende definir uma parábola com vértice no ponto (0,-3), a Susana volta a referir a expressão algébrica geral de todas as parábolas que têm o vértice sobre o eixo das ordenadas:

Ent- Eu agora queria uma [parábola] que tivesse o vértice em que ponto (0,-3).
S- É do tipo ax^2-c.
Ent- Então experimentem lá a traçar uma qualquer.
S- $2x^2-3$.

A Susana parece fazer uma interpretação algébrica global, considerando uma família de parábolas e só posteriormente é que concretiza uma dessas parábolas. Ela parece estar a utilizar a representação algébrica geral como modelo, tendo por base a abordagem que foi feita nas aulas. Quando se pede outra parábola com o mesmo vértice e com a concavidade voltada para baixo, ela relaciona as representações algébrica e gráfica da parábola já traçada considerando que bastava alterar o sinal da constante *a* e justifica que o menos três tem que ficar constante. O *c* da expressão geral é, pois, relacionado com a ordenada do vértice e a representação gráfica é definida com base na influência das constantes *a* e *c*.

Quando pretende representar uma parábola que passe pelos pontos de coordenadas (-3,0) e (2,0), a Susana utiliza a representação algébrica geral $y=(x+a)(x+b)$ e considera que esta pode ser representada pela expressão analítica $y= (x+3)(x-2)$. Quando se pede para representar outra que passe pelos mesmos pontos, o Ricardo serve-se da representação anterior e sugere que seja a sua simétrica, que ele designa por «negativa»:

> Ent- Outra que passe por aqueles dois pontos. Além daquela será que a gente consegue traçar mais alguma?
>
> R- A negativa dessa.
>
> (...)
>
> S- Menos *x*.
>
> R- Podia ficar $(x-3)(x+2)$.
>
> Ent- Não sei. O que é que achas?
>
> S- $(x-3)(x+2)$?...$x-3$ passava pelo ponto três...
>
> Ent- Experimenta lá. Experimenta a traçar essa a ver o que é que dá.
>
> S- ou três e menos dois [traçam o gráfico]
>
> S- Mas o *x* tem que ser menos três e dois, não tem? E com aquela ali não dá.

Ao tentar definir a parábola simétrica da anterior, o Ricardo utiliza a representação algébrica e substitui os coeficientes dos termos independentes pelos seus simétricos. A Susana, que tinha identificado os pontos dados como sendo os zeros da função, utiliza a concretização da variável independente como forma de verificar que as abcissas dos pontos passaram a ser outras. Quando pretende definir uma expressão para a parábola simétrica da inicial, ela parece viver um conflito, pois considera que tinha que "meter um valor negativo no *x*". Mas admite que as abcissas dos pontos iriam ser alteradas acabando por abandonar este tipo de abordagem. O Ricardo parece fazer uma abordagem que tem em conta o sinal do coeficiente do x^2 sugerindo, com sucesso, que se deve mudar o sinal do *x* apenas num dos factores, mas não consegue formalizar essa alteração. Posteriormente, ele parece fazer uma abordagem mais global da representação e servindo-se de propriedades algébricas consegue estabelecer um dos gráficos pretendidos:

E se nós fizessemos assim, temos esta [*(x+3)*] e temos esta [*(x-2)*]. Fazemos um parentesis aqui e um parentesis aqui [*((x+3)(x-2))*] e punha-se menos à frente

Quando se pede para representar uma terceira parábola que ainda passe pelos mesmos pontos, a Susana faz uma abordagem gráfica a partir dos gráficos já representados no computador e argumenta que "sei lá, podia ter o vértice aqui [indica o ponto (0,-1) no sistema de eixos] e passava". Embora a Susana pareça estar a considerar, incorrectamente, que o eixo dos *YY* é o eixo de simetria das parábolas já representadas, ela consegue justificar graficamente que há várias parábolas, de diferentes amplitudes, que passam por aqueles dois pontos.

Em resumo, na tradução da representação algébrica para a gráfica, a Susana utiliza dois tipos de estratégias: o recurso à influência das constantes *a* e *c* e o recurso à representação algébrica de famílias de funções. No que se refere à utilização das constantes, ela considera que a constante *a* determina o sentido da concavidade, enquanto que o *c* é associado com o ponto onde o gráfico corta o eixo das ordenadas. Quando a Susana faz uma abordagem da representação algébrica em termos de famílias de funções, parece ser possível distinguir dois tipos de situações: a família é definida com base num modelo pré-estabelecido, onde o papel das constantes é determinante, ou a família é referida de uma forma genérica podendo ser posteriormente ajustada. Em ambos os casos, a Susana consegue particularizar as funções pretendidas com sucesso. Este tipo de abordagem parece ter por base procedimentos estruturais. Contudo também há situações onde a Susana utiliza procedimentos de índole operacional. Trata-se da abordagem que é feita com base nas representações algébricas do tipo $y=(x+a)(x+b)$, onde ela recorre à concretização da variável como forma de estabelecer os seus zeros. O Ricardo tem uma intervenção mais moderada, no entanto, também recorre preferencialmente a famílias de funções como forma de estabelecer as representações algébricas. Para além desta abordagem, ele também se serve de representações gráficas e de propriedades algébricas como forma de estabelecer algumas conjecturas.

No grupo Beta, o coeficiente *a* da expressão algébrica é interpretado, principalmente, como determinando o sentido da concavidade da parábola. Ao representar gráficos de parábolas, uma com a concavidade voltada para cima e outra para baixo, a Ana introduz polinómios completos "o primeiro [$-x^2+2x+3$] é a [parábola] que tem a concavidade voltada para baixo" considerando que quem decide o sentido da concavidade da parábola "é o coeficiente do x^2".

A Ana, por vezes, parece utilizar parte da sua representação visual. No entanto tem algumas dificuldades em definir expressões algébricas que o possam caracterizar. Assim, quando é pedido para traçar o gráfico de uma parábola tendo por contradomínio o intervalo [0, +∞[, ela afirma que a parábola tem que passar pela origem: "[0, +∞[e a passar pela origem, então por exemplo o x^2". Quando pretende traçar outra parábola ela escolhe uma da mesma família, $y=2x^2$. Entretanto comenta que "não precisa de passar pela origem, basta que se acabe [tenha o vértice] apenas no ponto zero [$y=0$]". A Ana parece estar a considerar que há outras paráboas que têm o mesmo contradomínio, bastando que tenham o vértice sobre o eixo dos *XX*. Ela parece ter a noção de que há infinitas parábolas com o mesmo contradomínio, mas apenas utiliza a representação que admite como eixo de simetria o eixo dos *YY*.

Noutras situações, ela prefere utilizar a representação algébrica com base na influência das constantes. Por exemplo, quando pretende representar uma parábola com o vértice no ponto de coordenadas (0,-3), ela parece fazer uma interpretação algébrica global e utiliza a expressão geral de todas as que têm o vértice nesse ponto, escrevendo no papel a expressão ax^2-3. Posteriomente introduz a expressão $y=2x^2-3$ afirmando que o que elas têm que ter em comum é o coeficiente menos três.

Quando pretende traçar o gráfico de uma parábola que passe pelos pontos (-3,0) e (2,0), a Ana identifica estes pontos como sendo os zeros da função e escreve a representação algébrica na forma de produto de dois factores:

A- Ficava ... Isto vai acabar por ser os zeros, não é? Ficava $(x-3)(x+2)$.

R- Sim.

Ent- [Repetindo] portanto $(x-3)$.

A,R- Vezes $(x+2)$.

Ent- Então, experimenta lá a traçar para ver se realmente a parábola passa nesses dois pontos. No (-3,0) e (2,0) [traçam o gráfico]

A- Ah...

Ent- O que é que aconteceu?

A- Ah pois, passou pelo menos dois e pelo três. Então é $(x+3)(x-2)$.

A Ana parece fazer uma análise essencialmente algébrica utilizando a expressão analítica por comparação com actividades anteriores. É a partir da representação gráfica que verifica que o gráfico não passa nos pontos pretendidos e consegue relacionar as duas representações definindo um dos gráficos pedidos. Quando se pede para traçar uma parábola que passe pelos mesmos pontos mas com a concavidade virada para baixo, a Ana parece conseguir relacionar as representações algébrica e gráfica, pelo que não hesita em considerar a representação simétrica da anterior colocando-a entre parentesis e afectando-a do sinal menos.

Em resumo, ao fazer a tradução da representação algébrica para a gráfica, a Ana utiliza como principal estratégia o recurso à influência das constantes. Ela considera que o sentido da concavidade é determinado pelo sinal de *a* e a influência do *c* é discutida com base na representação de famílias de funções. Assim, a Ana apresenta a família ax^2-3 para definir as parábolas que têm o vértice no ponto de coordenadas (0,-3). A par desta abordagem, a Ana também utiliza, por vezes, a interligação entre as duas representações, quer invocando representações visuais quer servindo-se do traçado de gráficos para estabelecer a representação algébrica. O recurso a propriedades algébricas também é utilizado, sobretudo, quando pretende encontrar representações simétricas.

No grupo Gama, as constantes *a* e *c* são preferencialmente utilizadas quando pretendem representar gráficos de parábolas. Ao traçarem parábolas, uma com a concavidade virada para cima e outra para baixo, a Marta e o João acabam por introduzir expressões algébricas que são polinómios completos. O sentido da concavidade é, segundo a Marta, decidido pelo sinal do coeficiente do x^2 "[o sentido da concavidade depende do] coeficiente do x^2 ser positivo ou negativo". O valor do termo independente na representação algébrica também parece ter um significado importante para a representação gráfica, sendo considerado como o ponto de intersecção com o eixo das ordenadas "intersectam o eixo das ordenadas, o eixo dos *YY* no valor correspondente ao valor de *c*, ao valor constante". A Marta continua a traçar funções quadráticas que sejam polinómios completos quando lhe é pedido para traçar o gráfico de uma parábola que tenha por contradomínio $\Re_0^+$. Ela parece, no entanto, fazer uma interpretação mais gráfica do que algébrica da situação recorrendo a uma estratégia de tentativa e erro:

Ent- [Uma parábola cujo] contradomínio seja $\Re_0^+$.

M- x^2+x+2 por exemplo. [Traçam o gráfico] Oi! Não é.

J- Essa para ser o quê? $\Re_0^+$?

M- $\Re_0^+$.

Ent- [Confirmando] era para ser $\Re_0^+$.

J- Então a gente vai...

M- hum... então faz lá...

J- Se a gente tirar o dois?

M- Mais x. Então experimenta.

Ent- Será que vai dar? [Traçam o gráfico.]

M- Também não. x^2 dá de certeza, que isso eu sei. Mas eu queria uma assim mais completa. [João traça o gráfico de x^2.]

De facto, a Marta tem a noção de que há parábolas com o contradomínio pretendido cuja expressão analítica é mais completa do que x^2. Entretanto ela não consegue representá-las.

Quando se pretende definir a expressão algébrica da parábola que tem o vértice no ponto de coordenadas (0,-3), a Marta parece fazer uma interpretação algébrica sem ter em conta a posição do ponto no sistema de eixos:

M- Uma parábola que tenha o vértice no ponto (0,-3)?... Hum ... zero ....menos três, [João] experimenta a traçar x^2+3x... Hum...

J- $3x$... Neste caso não ...

M- Não, não, zero... (0,-3) é aqui [aponta no sistema de eixos do ecrã]... Não, menos três só [isto é, a expressão x^2-3].

Ent- Portanto, achas que essa vai dar? Porquê?

M- Penso que sim. Porque a parábola tem que intersectar sempre o eixo dos YY no valor de *c*. Isso é aqui neste ponto. E o eixo... E [o que] determina o eixo de simetria vai ser o coeficiente do *x*. Se nós não pusermos [o termo em *x*] o eixo de simetria vai ser o eixo das ordenadas.

Após ter feito uma abordagem gráfica da posição do ponto no sistema de eixos, a Marta parece conseguir relacionar as representações algébrica e gráfica, conseguindo definir a parábola pretendida. O estudo que ela faz parece ter em conta a posição do eixo de simetria da parábola. Ela considera que a deslocação da parábola, ao longo do eixo das abcissas, é determinada pelo monómio *bx* da expressão algébrica geral. Este tipo de abordagem já tinha sido referido, pelos elementos do grupo, aquando da elaboração do relatório relativo às actividades desenvolvidas em computador e relacionadas com a função quadrática. Neste relatório os elementos do grupo relacionaram o valor de *b* com a deslocação do eixo de simetria das parábolas:

> Quanto maior for o coeficiente do *x*, ou seja, «*b*» [sic], mais para a esquerda o eixo de simetria da parábola se vai encontrar, se $a>0$. Se, pelo contrário, $a<0$, o eixo de simetria da parábola deslocar-se-á mais para a esquerda quanto menor for o coeficiente de *x* (*b*)

Para confirmar esta conclusão, o grupo recorre à determinação dos zeros de uma das funções para mostrar que o eixo de simetria passa no ponto médio entre os zeros, mas não faz o mesmo estudo para as restantes funções, acabando por não provar a afirmação anteriormente feita.

Quando se pretende traçar gráficos de parábolas que passem pelos pontos de coordenadas(-3,0) e (2,0), a Marta utiliza a representação algébrica $y=(x+3)(x-2)$ como modelo:

> M- Então vamos fazer: abre parêntesis, $x+3$, fecha parêntesis, abre parêntesis, $x-2$. [Traçam o gráfico] dois e menos três [confirma os zeros no gráfico].
> Ent- [Confirmando] Ora portanto, passa pelo ponto(-3,0) e (2,0). Será que consigo traçar mais parábolas que passem por este ponto? Ou não?
> M- Posso.
> Ent- Outra por exemplo?
> M- Hum... $(2x+3)(2x-2)$...[traçam o gráfico]. Oi! Ela não passou...
> Ent- O que é que aconteceu?
> M- Ficou mais fechada.
> Ent- Porque é que ela ficou mais fechada?
> M- Porque aumentamos o coeficiente do *x*.

A Marta parece estar a fazer uma abordagem algébrica que permanece quando se pretende representar outra função que passe pelos mesmos pontos. Ela parece estar a associar os termos independentes de cada um dos factores aos zeros, alterando os coeficientes de *x* e só verifica que esta abordagem não serve a partir da representação gráfica, uma vez que esta não passa nos pontos pretendidos. Embora tenha partido de uma interpretação algébrica, a Marta consegue relacionar esta representação com a gráfica, pois conclui que a segunda parábola ficou mais fechada devido ao aumento do coeficiente do *x*. É também a partir da representação gráfica da última parábola, por identificação dos seus zeros, que ela consegue definir uma expressão analítica de outra parábola que passa pelos mesmos pontos que a anterior e que é definida por $y=(2x+6)(2x-4)$.

Quando se pede outra parábola com os mesmos zeros, mas com a concavidade virada para baixo, a Marta volta a fazer uma abordagem algébrica:

	<u>Comentário:</u>
M- Podes pôr assim. *-2x* ... hum menos seis, fecha [parentesis]...abre ... *-2x*... mais quatro	Está a representar $(-2x-6)(-2x+4)$
J- Vai passar por onde, por dois ?	
M- Sim.	
Ent- [Relembrando] vai passar pelos mesmos pontos, só que é para ter a concavidade ao contrário.	
M- Espera. Espera aí. Isto fica logo tudo ao contrário. Isto aqui vai dar positivo [refere-se ao produto dos factores $(-2x)(-2x)$ que representam o termo em x^2 na expressão geral].	Aplica a propriedade distributiva e está a considerar o produto $(-2x)(-2x)$
Ent- Então o que é que vais ter que fazer?	
M- Tenho que mudar o sinal. Mais [sinal da operação], escreve lá aí no quatro ... não, não, assim é que está mal... é que eu estou-me a esquecer que tenho que mudar pró outro lado. Se nós mudarmos o quatro para este lado fica mais quatro, mais quatro a dividir por menos dois vai dar menos dois.	O João alterou a expressão anterior para $(-2x+6)(-2x-4)$ e a Marta está a resolver mentalmente: $(-2x-4)=0 \Leftrightarrow -2x=4 \Leftrightarrow x=-2$.
J- Mudamos para onde?	Aplica a lei do anulamento do produto à expressão anterior $-2x+6=0 \vee -2x+4=0$
M- Para este lado. Se formos igualar isto a zero vai-te dar $-2x+6 = 0$ ou $-2x+4=0$ e depois tens que fazer o cálculo. Pois, vai dar negativo.	
J- E a gente quer positivo?	
M- Pois, este aqui queres positivo também, ou queres negativo? [traçam o gráfico] Não, deu igual ,não deu?	

Ao fazer uma abordagem algébrica, a Marta preocupa-se essencialmente com a obtenção dos mesmos zeros recorrendo à resolução de cada uma das equações obtidas a partir de cada um dos factores. Contudo, a partir da representação algébrica, ela consegue verificar que não vai obter o gráfico pretendido, conseguindo assim identificar nesta representação o sentido da concavidade da parábola. Ao interpretarem a representação gráfica, que fica sobreposta com a anterior, o João considera que esta representação é igual à anterior:

> Ent- Deu igual? Então o que é que aconteceu, relativamente à de cima?
>
> J- A gente só deu valores iguais e não lhe mexemos...
>
> M- Pois, então... Ah, já percebo. É que este aqui [coeficiente do temo em *x* da expressão algébrica] como é este vezes este ia dar o x^2 positivo por isso tem que ser... [altera a função para *y=(2x+6)(-2x+4)* e traçam].

O João serve-se da representação gráfica para concluir que ambas são iguais e quando tenta justificar porquê, parece admitir que o facto de se ter multiplicado ambos os termos por menos um não altera a representação. A Marta, entretanto, consegue estabelecer uma correspondência entre esta expressão algébrica e a expressão geral ax^2+bx+c que lhe permite identificar o factor que vai determinar o sentido da concavidade. Esta actividade parece permitir à Marta reconhecer pontos comuns nas duas representações algébricas, o que lhe vai permitir encontrar o gráfico pretendido, introduzindo a expressão algébrica $(2x+6)(-2x+4)$.

Em síntese, na tradução da representação algébrica para a gráfica, a Marta utiliza preferencialmente polinómios completos para representar graficamente parábolas e evidencia o papel das constantes *a* e *c*, onde o *a* para além de determinar o sentido da concavidade também influencia a sua amplitude. A constante *b* também é referida pela Marta, como forma de estabelecer o eixo de simetria da parábola. Há, no entanto, situações em que a Marta não tem em consideração a influência destas constantes e opta por uma estratégia de tentativa e erro como forma de encontrar os gráficos pretendidos. Tal facto, parece dever-se a ela ter algumas representações visuais que depois não consegue concretizar algebricamente. A representação de parábolas a partir do conhecimento dos seus zeros, privilegia o recurso à representação algébrica geral $y=(x+a)(x+b)$ onde as constantes *a* e *b* são identificadas com as abcissas dos pontos dados. Na obtenção de outras parábolas que passem pelos mesmos pontos, a Marta consegue fazer a interligação entre a representação algébrica e gráfica, por forma a definir as parábolas pretendidas. Há, ainda, algumas situações em que ela também recorre a processos algébricos para definir estas parábolas. É estabelecida uma relação entre as representações $y=(x+a)(x+b)$ e $y=ax^2+bx+c$ por forma a conseguir definir o sentido da concavidade da parábola.

No grupo Delta, embora, por vezes, seja utilizada a influência das constantes na determinação da expressão algébrica, tal facto não é utilizado espontaneamente como explicação. Quando é pedido para representarem gráficos de duas parábolas, uma com a concavidade virada para cima e outra para baixo eles optam por editar as funções mais simples $y=x^2$ e $y=-x^2$. Também, nas aulas realizadas no computador, os elementos do grupo tiveram dificuldades em separar o coeficiente do x^2 do próprio x^2 argumentando nos relatórios acerca da influência deste coeficiente que "quanto maior for o valor de x^2 mais fechada é a parábola, quanto menor for o valor de x^2 mais aberta é a parábola".

Ao tentar definir uma parábola que tenha o vértice no ponto de coordenadas (0,-3), o Bruno parece utilizar a representação algébrica, destacando o papel da constante *c*:

Ent- Nós queremosquer que o vértice esteja neste ponto: (0,-3)?

B- Zero... [traça x^2+3].

Ent- Ela tem o vértice em que ponto?

B- Ah! Isto está ao contrário.

J- [Tem o vértice em] mais três.

Ent- (0,3), não é?

B- É menos três. É que nas rectas é que o *c* é negativo [traça x^2-3].

O Bruno parece utilizar a representação algébrica global que define a parábola pretendida. Contudoé a partir da representação gráfica da primeira parábola traçada que ele consegue definir aquela que tem o vértice no ponto dado. Ele parece conseguir relacionar as representações algébrica e gráfica como forma de estabelecer o gráfico pedido e consegue utilizar os coeficientes do termo independente da representação algébrica, quer na função afim quer na quadrática, estabelecendo uma correspondência destes com a representação gráfica o que lhe permite definir a ordenada na origem. Quando se pede para traçar outra parábola que tenha o vértice no mesmo ponto, o Bruno parece relacionar a representação algébrica e gráfica recorrendo à parábola já traçada para a colocar com a concavidade voltada para baixo, embora a representação algébrica seja mais elaborada$y=-(x^2+3)$.

Quando se pretende representar graficamente parábolas que passem pelos pontos de coordenadas (-3,0) e (2,0), o Bruno faz uma abordagem essencialmente algébrica e sugere que pode ser representada por $y=(x+3)(x-2)$. Ele vai justificar esta representação com base na resolução algébrica "dá menos três e dois... vai anular aqui [indica o segundo factor da expressão algébrica], se for dois menos dois é zero". Também quando se pretende saber qual é o ponto de intersecção da parábola com o eixo das ordenadas, ele argumenta que:

B- [O eixo] das ordenadas? Corta no ponto seis.

Ent- Seis?

B- Menos seis. Menos dois vezes três dá menos seis.

Ent- Porque é que é menos seis?

B- Está no gráfico e também menos dois vezes três vai dar.

O Bruno, para além da interpretação da representação algébrica, parece estar também a utilizar em simultâneo a representação gráfica do ecrã do computador, conseguindo assim relacionar as duas representações. Quando se pede para traçar outra parábola que tenha os mesmos zeros da anterior, esta é utilizada como modelo:

J- O módulo.

(...)

Ent- O módulo de quê? Daquela?

J- Daquela.

B- [Traça o gráfico do módulo da anterior.] Portanto essa também passa.

(...)

Ent- [Consegues fazer] ainda outra que passe por esses dois pontos?

J- Com a concavidade voltada para baixo.

A Joana parece estar a fazer uma abordagem essencialmente gráfica utilizando elementos da sua representação visual para dar exemplos de outros gráficos que passam pelos mesmos pontos. Ela consegue utilizar o gráfico traçado para o transformar noutros, já seus conhecidos. Para além destes gráficos o Bruno parece considerar que não deve ser possível representar mais:

Ent- Outra [parábola] com a concavidade virada para cima. Será que a gente consegue?

B- Não. Acho que não.

Ent- [Simula outra possível parábola no ecrã do computador com o lápis]

B- Tem que passar sempre aqui [refere-se ao ponto de intersecção com o eixo dos *YY*, no ecrã do computador]. Dá menos dois vezes três dá sempre menos seis. Para passar nestes pontos, acho que não dá.

Ele parece estar a fazer uma interpretação essencialmente algébrica onde os termos independentes de cada um dos factores da expressão algébrica são associados com os zeros da função. Assim, ele parece considerar que estes valores permanecem fixos, implicando a sua alteração, uma alteração dos seus zeros. Esta ideia parece ser confirmada quando ele admite que talvez possa obter outra parábola com os mesmos zeros introduzindo a expressão $y=(2x-2)(2x+3)$, onde vai apenas alterar o coeficiente do x. Ao traçar o gráfico, a Joana consegue relacionar a representação algébrica e gráfica justificando a amplitude da parábola com a alteração do coeficiente do x. Por fim, o Bruno consegue representar outra parábola que passa pelos mesmos pontos ($g(x)$ da figura 5.16) estabelecendo entre ambos uma relação de desigualdade "[depois de traçar o gráfico de $g(x)$ no computador diz] cá está [é possível representar], só que é maior".

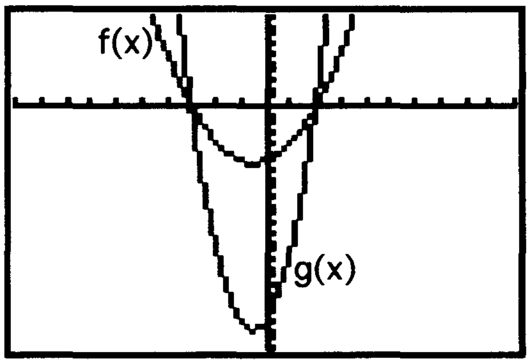


Figura 5.16

O Bruno parece estar a fazer uma comparação dos dois gráficos estabelecendo entre eles uma relação de grandeza que resulta da leitura no eixo dos *YY*.

Em resumo, na tradução da representação algébrica para a gráfica, o Bruno utiliza uma estratégia essencialmente gráfica onde as representações algébricas são, por vezes, estabelecidas a partir da alteração de representações gráficas. Está, no entanto, subjacente a esta estratégia uma abordagem baseada na influência das constantes, uma vez que para obter as representações gráficas é preciso estabelecer primeiro a representação algébrica. Assim, o Bruno parece relacionar o *a* com o sentido da concavidade e o *c* com o ponto onde o gráfico intersecta o eixo dos *YY*. Por vezes, o Bruno também recorre à resolução algébrica como forma de estabelecer a expressão analítica que defina os gráficos pretendidos. A Joana tem um papel menos interventivo, contudo também apresenta uma preferência pela abordagem em termos gráficos, acabando por dar exemplos de gráficos que passam por pontos dados com base num dos gráficos já traçados, considerando, por exemplo, o seu simétrico e o módulo. A Joana também refere a variação da amplitude da parábola associando-a ao valor da constante *a*.

4.2 - Tradução da representação pontual para a algébrica

Nesta secção pretende-se caracterizar a forma como os alunos interpretam os pontos no plano cartesiano, por forma a definir uma expressão algébrica que possa dar origem a um gráfico que passe por esses pontos. Tal como já foi referido no capítulo anterior, a representação pontual refere-se a funções que são definidas a partir de pontos particulares, apresentados na forma de pares ordenados.

Este tipo de actividades não foi directamente abordado nas aulas, sobretudo no caso em que os pontos se situam sobre o eixo das abcissas pelo que aparecerão problemas com a sua interpretação, sendo, por vezes, as suas coordenadas interpretadas em separado ou mesmo desprezadas quando são nulas. Este tipo de abordagem aparece essencialmente no caso da função afim, onde os alunos parecem estabelecer uma correspondência entre cada uma das coordenadas do ponto e as constantes de representação algébrica geral $y=ax+b$. No caso da função quadrática os alunos recorrem à representação algébrica na forma de produto de factores, permitindo estabelecer uma correspondência entre os termos independentes de cada um dos factores e as abcissas dos pontos.

No grupo Alfa, ao pretender traçar uma função afim que passe pelo ponto de coordenadas (0,-2), a Susana parece visualizar no sistema de eixos cada uma das coordenadas do ponto, interpretando-as em separado:

S- Eu acho que a gente não vai conseguir fazer uma recta com essas coordenadas. Porque uma recta que passa pela origem... Não é? Aqui o objecto é o zero. [Indica a abcissa do ponto no par ordenado representado no papel] Portanto uma recta que passa pela origem...

Ent- O objecto é zero.

S- Portanto uma recta que passa pela origem ... é uma função linear... e nessas funções o *b* é zero.

A Susana parece fazer alguma confusão estabelecendo uma correspondência entre a abcissa do ponto e a sua posição no sistema de eixos. O ponto parece ser interpretado graficamente como definido apenas pela abcissa, não tendo a sua ordenada qualquer influência. Esta abordagem não permite à Susana definir a recta pretendida. Entretanto, ela consegue fazer uma análise correcta das funções lineares, que passam pela origem, considerando que o valor de *b* tem que ser zero.

Já quando pretendem definir a expressão analítica das funções afins que passam pelo ponto de coordenadas (2,0), a Susana e o Ricardo parecem estabelecer uma correspondência entre as suas coordenadas e as constantes *a* e *b*:

Ent- A gente quer uma recta que passe pelo ponto de coordenadas (2,0).

S- *b* é zero e...

Ent- A Susana diz que o *b* é zero. Concordas Ricardo?

R- Sim, porque a ordenada é zero.

Ent- Se o *b* for zero.

S- Temos uma expressão do tipo *ax*.

Ent- Que passa em que ponto?

S- Passa na origem, *ax* passa na origem dos eixos.

Ent- [Repetindo] Passa na origem, então...

S- Esta não pode passar na origem.

O facto de a ordenada do ponto ser zero parece ser suficiente para que os alunos admitam que o *b* vai ser zero. No entanto, a representação que é sugerida pela Susana é apresentada em termos de família de funções que passam pela origem, sendo analisada do ponto de vista gráfico.

No grupo Beta, numa primeira abordagem, a Ana também estabelece uma correspondência entre as coordenadas do ponto e as constantes *a* e *b*, quando pretende traçar uma recta que passe pelo ponto de coordenadas (2,0), pois afirma que a expressão analítica "vai ter que ter um termo em *x* e o *b* tem que ser zero". Esta situação só é ultrapassada quando ela identifica o ponto como sendo o zero da função e recorrendo a um processo de resolução algébrica.

No grupo Gama, ao tentar estabelecer uma recta que passe pelo ponto de coordenadas (2,0), a Marta e o Ricardo parecem estabelecer uma correspondência entre as coordenadas do ponto e as constantes *a* e *b* sendo a primeira coordenada identificada com o *a* e a segunda com o *b*:

Ent- Vamos agora traçar gráficos que passem num ponto de coordenadas como por exemplo (2,0).

M- Hum... neste caso... Então quer dizer que *2x* ...

Ent- No ponto (2,0) que está aqui algures no eixo [indica o ponto no ecrã do computador].

M- [Apagam os gráficos traçados anteriormente] Hum... *2x*... eu acho que sim ...[traçam *y=2x*]. Não... o número são dois zeros porque o *b* é zero percebes? [Explica ao João]

J- O *b* tem que ser zero.

M- O *b* tem que ser zero ... Para ser dois [refere-se à abcissa do ponto]. Então ... se intersecta o dois o *x* vai ser zero.

J- Não .... Se *b* é zero ele vai passar pelo zero, ... não pode ser zero.

A Marta parece fazer uma interpretação algébrica quando estabelece a correspondência entre as coordenadas do ponto e as constantes *a* e *b* que resulta na expressão *2x*. No entanto, quando traçam o gráfico ela verifica que ele não passa pelo ponto pretendido e analisa o facto de a recta passar na origem com base no valor da constante *b* que é zero. A abordagem que a Marta faz do ponto parece ser baseada na representação gráfica, pois ela considera que se trata de um "número", entretanto não se esquece de mencionar as suas coordenadas considerando que "o ponto são dois zeros". O João parece utilizar a influência da constante *b* para justificar que ele não pode assumir o valor zero, pois desta forma a recta passa pela origem. As representações pontual e gráfica parecem gerar um conflito que resulta do facto de ter sido estabelecida uma correspondência directa entre as coordenadas do ponto dado e as constantes *a* e *b* da expressão algébrica.

No grupo Delta, ao tentar representar uma função afim que passe pelo ponto de coordendas (0,-2), a Joana estabelece uma correspondência entre os monómios da expressão algébrica geral e as coordenadas do ponto:

Ent- Como é que vai ser uma função deste tipo [uma função afim] para passar [no ponto (0,-2)]?

J- [O] *ax* tem que ser zero e o *b* tem que ser menos dois.

Ent- O *ax*...

J- Acho que este, o valor de *x* tem que ser zero ... acho que fica horizontal ao eixo das abcissas...

Embora, inicialmente, a Joana pareça estabelecer uma correspondência simples entre os monómios e as coordenadas do ponto por forma a que ao monómio *ax* corresponda o zero e ao *b* o menos dois. Posteriormente, ela tentafazer uma interpretação algébrica concretizando a variável independente, o que lhe permite definir a expressão algébrica de uma das rectas pretendidas. Este procedimento parece estar relacionado com o facto de os elementos deste grupo apresentarem alguma dificuldade em separar o coeficiente do *x* do próprio *x*, problema este que já tinha sido referido aquando das conclusões apresentadas nos relatórios das aulas em computador.

Também ao tentar traçar o gráfico de uma função afim que passe pelo ponto de coordenadas (2,0), o Bruno parece estabelecer uma correspondência entre as coordenadas do ponto e as constantes *a* e *b*. Assim, ele introduz a função $y= 2x$ e traça o respectivo gráfico. Tal como na situação anterior, ele parece relacionar o *a* com a abcissa do ponto e o *b* com a ordenada.

Em resumo, a tradução da representação pontual para a algébrica envolve diferentes estratégias. No caso da função afim, se o ponto dado se situa sobre o eixo dos *YY*, a maioria dos alunos identifica o *b* da expressão algébrica geral com a ordenada na origem e atribui-lhe o valor da ordenada do ponto. Esta estratégia é abordada com mais pormenor na passagem da representação algébrica para a gráfica, onde se pode considerar que há, da parte da maioria dos alunos entrevistados, uma interiorização deste procedimento que é utilizado como modelo para obter a representação algébrica. No caso do ponto se situar sobre o eixo dos *XX*, há uma tendência geral para estabelecer uma correspondência entre as constantes *a* e *b* e as coordenadas do ponto, por forma a que o *a* seja associado com a abcissa e o *b* com a ordenada. Esta estratégia parece ser utilizada como uma extensão do caso anterior, quando o ponto se situa sobre o eixo das ordenadas.

No caso da função quadrática, se o ponto se situa sobre o eixo dos *YY*, a sua ordenada é associada com o *c* da expressão algébrica geral sendo esta estratégia abordada com mais pormenor na tradução da representação algébrica para a gráfica. No caso de os pontos se situarem sobre o eixo das abcissas, os alunos utilizam a representação algébrica na forma de produto de dois factores e estabelecem uma correspondência entre as abcissas dos pontos dados e os termos independentes de cada um dos factores da expressão algébrica. Esta estratégia é analisada nas secções da passagem da representação algébrica para a gráfica e vice-versa.

4.3 - Tradução da representação gráfica para a algébrica

A passagem da representação gráfica para a algébrica significa que a partir de um gráfico, dado no papel ou traçado no computador, os alunos encontrem uma representação algébrica que defina esse gráfico. Verificou-se que, quer no caso da função afim como no da função quadrática, na passagem entre estas duas representações os alunos utilizam preferencialmente alguns pontos particulares, zeros e pontos de intersecção com o eixo das ordenadas.

4.3.1 - O caso da função afim

No caso da função afim, apenas dois dos grupos foram questionados acerca deste tipo de tradução. Ambos utilizam a intersecção com os eixos coordenados como forma de estabelecer a representação algébrica.

No grupo Beta, quando se pretende definir uma expressão algébrica para o gráfico da figura 5.18, a Ana começa por identificar o ponto onde o gráfico corta o eixo dos *XX*: "então isto era o menos dois [ponto onde o gráfico corta o eixo dos *XX*] logo o *b* tinha que ser dois..., não é? Ai não, pois, senão era repetido". O facto de a Ana ter considerado que o *b* era dois, com base no ponto onde o gráfico intersecta o eixo dos *XX*, parece levantar alguma dificuldade, pois ela também considera a ordenada do ponto de intersecção com o eixo das ordenadas como representativo do *b*. Ela parece estar a estabelecer uma relação entre a abcissa do ponto onde o gráfico corta o eixo dos *XX* e o valor de *b* na expressão algébrica geral. Depois de ter identificado o zero da função, a Ana parece estabelecer uma ligação entre as duas representações considerando que o coeficiente do *x* vai ser um e que "o *b* tinha que ser menos dois. Não dois, dois, dois ela vai passar pelo dois". Ela acaba por concluir que o *b* vai ser dois devido à observação na representação gráfica da intersecção com o eixo das ordenadas. De facto, parece haver alguma dificuldade com a representação algébrica da ordenada na origem, pois quando se pretende uma expressão para o gráfico da figura 5.1, a Ana considera que ela vai ser do tipo *y=-x-4* "então o *a* é menor que zero. O ponto [ordenada na origem] é quatro. Para já é menos *x* menos quatro". Ela parece considerar que o valor da constante *b* tem que ter o sinal contrário ao da ordenada na origem representado no gráfico. No entanto, quando traça o gráfico considera que aquele não serve e introduz a representação *y=-x+4*. A ordenada na origem continua a ser a forma de a Ana e o Rui escolherem, de entre *x-2, 3x-2, -x-2* e *-x+2*, as expressões analíticas que dão origem aos dois gráficos paralelos (figura 5.17) e que estão representados no ecrã do computador:

A- Então é o menos *x*. Não é o menos *x* mais dois e...

R- Menos *x* menos dois.

Ent- Como é que justificam que são essas?

A- Porque, para já o dois ali [aponta para a representação algébrica de *-x+2]* é positivo. Aqui [aponta no gráfico para o ponto de intersecção com o eixo das ordenadas, (0,2)]é o dois, passa pelo ponto dois. Ali [na representação algébrica de *-x-2*]o b é menos dois passa pelo menos dois [aponta no gráfico o ponto de intersecção com o eixo das ordenadas, (0,-2)].

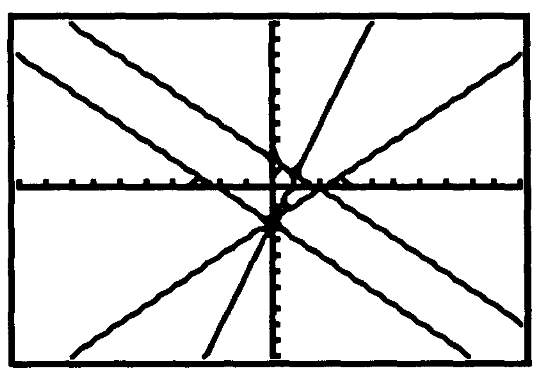


Figura 5.17

A ordenada na origem continua a ser uma das características privilegiadas para identificar a representação algébrica a partir da representação gráfica. Embora eles não o explicitem, o facto de as rectas paralelas terem a mesma inclinação foi utilizado neste caso, pois havia várias rectas que passavam pelo ponto de ordenada menos dois.

Em resumo, a Ana ao pretender fazer a tradução da representação gráfica para a algébrica baseia-se na influência das constantes *a* e *b*. Há, contudo, situações em que o papel das constantes causa algumas dificuldades, assumindo características particulares: o *b* é identificado com o simétrico da ordenada na origem e o *a* acaba por ser sempre igual à unidade. A ordenada na origem parece ser a coordenada mais utilizada na tradução, sendo a sua identificação feita com facilidade em ambas as representações.

No grupo Delta, quando lhe é pedido para encontrarem uma representação algébrica para o gráfico da figura 5.18, dado no papel, o Bruno começa por identificar os pontos de intersecção com os eixos coordenados considerando apenas as coordenadas que não são nulas e interpretando-as em valor absoluto: "aqui [ponto onde o gráfico corta o eixo dos *XX*] dá dois, duas vezes *x* mais dois [ponto onde o gráfico corta o eixo dos *YY*] ... É dois *x* mais dois é."

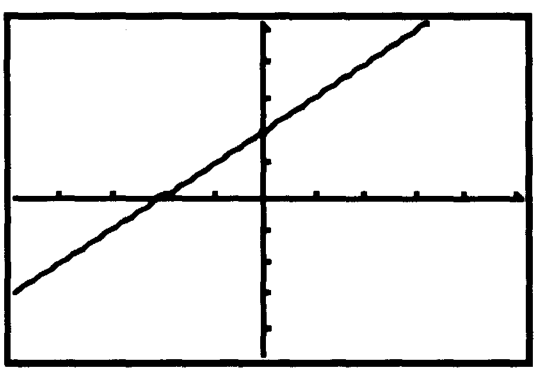


Figura 5.18

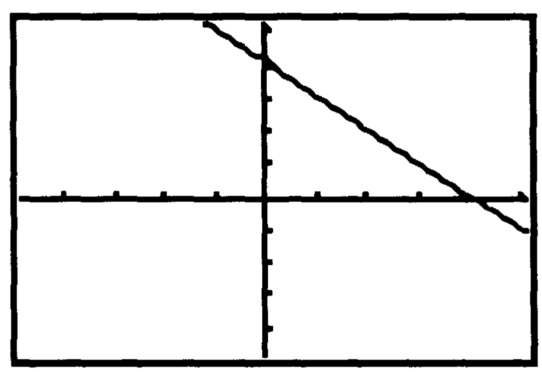


Figura 5.19

O Bruno parece estar a estabelecer uma correspondência entre os valores que identificou para a abcissa e ordenada e as constantes *a* e *b* da expressão algébrica geral. Assim, ele considera que o gráfico corta o eixo das abcissas no "ponto" dois e o das ordenadas também no "ponto" dois, pelo que supõe que a expressão analítica deve ser $y=2x+2$. A interpretação da expressão algébrica anterior só é feita a partir da sua representação gráfica, o que leva a Joana a considerar que o ponto de intersecção com o eixo das abcissas é o ponto «um» e, tal como o Bruno, ela parece considerar apenas o valor absoluto das coordenadas dos pontos. Após ter verificado que o ponto de intersecção do gráfico obtido, anteriomente, com o eixo dos *XX* tinha por abcissa menos um, o Bruno alterou a expressão algébrica para $y= x+2$: "*x* mais dois... [traça o gráfico] é isto. Diminuí o coeficiente [do *x*] para ela lá passar... Assim já dá". A estratégia que o Bruno está a utilizar consiste em fixar a recta no ponto (0,2) e rodá-la por forma a que ela também passe no ponto (-2,0). Ele parece estar a imaginar a recta pretendida e através da manipulação algébrica (alteração das constantes) procura defini-la. Este procedimento também já foi utilizado noutras situações atrás referidas e parece estar envolvido numa estratégia de tentativa e erro. Também quando se pede uma expressão algébrica para o gráfico dado pela figura 5.19, o Bruno utiliza como referência o ponto de intersecção com o eixo das ordenadas:

B- Essa é.... dá menos quatro [refere-se ao ponto de intersecção do gráfico com o eixo dos *XX*] é 4. Esta [[refere-se ao ponto de intersecção do gráfico com o eixo dos *YY*] agora é... para passar pelo quatro tem que ter sempre aqui o maisquatro.

Ent- Ela é crescente ou decrescente? Esta? [função do gráfico da figura 5.19]

J- Decrescente.

Ent- É decrescente. Então o que é que vai ter que acontecer?

J- *x* tem que ser negativo.

B- Sim... ah! decrescente,está bem... hum...

J- Experimenta lá o $-2x+4$.

A Joana consegue ligar as representações algébrica e gráfica quando relaciona a monotonia com o sinal do coeficiente do *x*, considerando que este tem que ser negativo dado que a função é decrescente. Ela não tem, no entanto, em atenção outras características como, por exemplo, a identificação do zero da função na expressão algébrica, acabando por sugerir ao Bruno que introduza a expressão $y=-2x+4$. Depois de traçar o gráfico desta função, o Bruno verifica que o zero não é o mesmo que o do gráfico dado e acaba por utilizar o mesmo raciocínio do caso anterior, isto é, ele vai alterar o valor do coeficiente do *x* por forma a obter uma recta que sofre uma rotação em torno da ordenada na origem, acabando por traçar o gráfico da função $y=-x+4$.

Em resumo, o Bruno faz a tradução da representação gráfica para a algébrica com base nos pontos onde o gráfico intersecta os eixos coordenados. Neste processo ele utiliza dois tipos de estratégias. Numa primeira abordagem serve-se dos pontos onde o gráfico corta os eixos coordenados e estabelece duas correspondências: uma entre a constante *a* e a abcissa do ponto de intersecção com o eixo dos *XX* e a outra entre a constante *b* e a ordenada do ponto onde o gráfico intersecta o eixo dos *YY*. Numa fase posterior, serve-se da expressão algébrica já definida e acaba por desenvolver um método próprio, que consiste em fixar a posição da recta na ordenada na origem e alterar a expressão algébrica por forma a que a recta rode até passar pelo ponto pretendido do eixo dos XX. Deste procedimento pode ainda destacar-se o facto de o ponto de intersecção com o eixo das ordenadas ser utilizado preferencialmente e a abordagem que é feita pressupõe uma estratégia de tentativa e erro.

4.3.2 - O caso da função quadrática

Todos os grupos foram questionados sobre a tradução da representação gráfica para a algébrica, na função quadrática. Os participantes escolheram, predominantemente, os pontos de intersecção com o eixo das abcissas para definir a representação algébrica, sempre representada sob a forma do produto de dois factores. O valor da ordenada na origem foi, por vezes, utilizado para confirmar a representação gráfica obtida.

No grupo Alfa, ao pretender encontrar uma representação algébrica para o gráfico da figura 5.20, a Susana parece fazer uma abordagem global com base no gráfico dado: "portanto se a gente deslocar a parábola (...). Se a gente soubesse, portanto, a versão original das transformações que a parábola sofresse...".

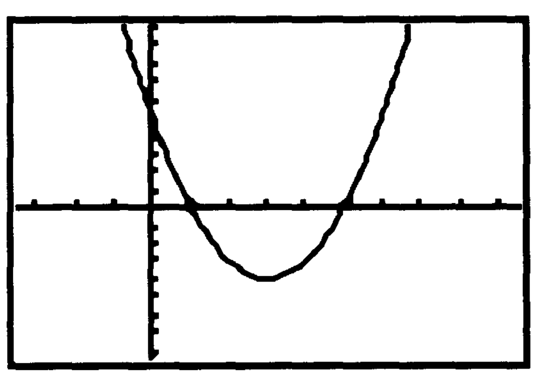


Figura 5.20

A Susana parece estar a recordar o estudo feito nas aulas sobre a representação algébrica do tipo $y=a(x-h)^2+k$, em que foram associadas deslocações ao h e ao k. Ela parece interpretar cada uma destas representações como modelos dinâmicos, que se deslocam ao longo do ecrã do computador.

Embora a Susana tenha conhecimento desta representação algébrica, ela não consegue utilizá-la, neste contexto, e acaba por recorrer a uma representação algébrica do tipo *(x+a)(x+b)* que tinha sido utilizada em actividades anteriores:

> S- [Identifica os zeros com as abcissas dos pontos] um e cinco.
> Ent-Um e cinco, não é? Como é que ficaria, portanto a expressão?
> S- Menos... um e cinco. *-x+1*... não *x-1*...
> Ent- [Repetindo] *x-1*...
> S- Não. Põe *x-1* [dirigindo-se ao Ricardo] vezes...
> Ent- Vezes quanto?
> S- Vezes *-x+5*.

A Susana acaba por optar pela expressão algébrica representada na forma de produto de dois factores e consegue, a partir desta, reconhecer características gráficas, pois considera que "um dos *x* é negativo" e portanto a parábola vai ter a concavidade virada para baixo. Ao pretender alterar a expressão, a Susana parece considerar que a constante no segundo factor tem que ser mais cinco:

> S- Então tem que ser... Mas como o produto tem que dar positivo tem que ser menos cinco. Ai menos *x+5*.
> Ent- *-x*? Se puseres *-x*...
> S- Não, não. Tem que ser *x+5*.
> Ent- [Repetindo] *x+5*. Então experimenta lá.
> S- Não. Tem que ser menos cinco.

Ela parece estar a estabelecer uma correspondência entre a abcissa do ponto e a constante da representação algébrica, mas tem alguma dificuldade em considerar que esta tem que ser menos 5. Quando se pretende saber qual é o ponto de intersecção com o eixo dos *YY* a Susana opta por uma abordagem algébrica:

> Ent- Qual é que é o ponto de intersecção com o eixo dos YY?
> S- É o *c*...É cinco ...
> Ent- [Repetindo] o *c*. É cinco. Concordas Ricardo?
> S- Menos um vezes menos cinco.

Embora já tenha sido traçado o gráfico, a Susana prefere utilizar argumentos algébricos. Tal parece dever-se à necessidade de provar que a expressão algébrica correspondia ao gráfico dado.

Em resumo, ao pretender fazer a tradução da representação gráfica para a algébrica, a Susana começa por recorrer a argumentos gráficos, procurando descrever algebricamente a parábola a partir da posição do seu vértice, com base na equação do tipo $y=a(x-h)^2+k$. Este processo é, no entanto, abandonado, optando por construir a representação algébrica a partir da identificação dos zeros da função e estabelecendo uma correspondência entre as abcissas destes pontos e as constantes da equação $y=(x+a)(x+b)$. Esta abordagem levanta algumas dificuldades acerca do sinal das constantes, contudo elas são ultrapassadas com base em processos algébricos relacionados com a determinação dos zeros da função, uma vez que, o gráfico só é traçado depois de as várias alterações terem sido executadas. Verifica-se no entanto que a Susana consegue relacionar as representações algébrica e gráfica por forma a identificar características gráficas na expressão algébrica, como por exemplo, o sentido da concavidade da parábola.

No grupo Beta, ao pretender encontrar uma expressão algébrica para o gráfico da figura 5.20, a Ana utiliza os zeros da função: "quando o *x* é igual a um... e o *x* é igual a cinco a função é nula". Depois de identificar os zeros da função, ela utiliza a representação algébrica na forma de produto de dois factores que tinha sido abordada anteriomente e introduz a função $y=(x-1)(x-5)$. Quando pretende encontrar uma expressão algébrica para o gráfico da figura 5.21, a Ana parece utilizar uma estratégia onde integra as duas representações.

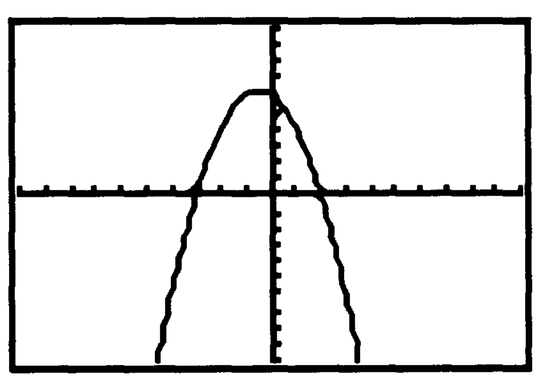


Figura 5.21

Ela começa por identificar os zeros no ecrã do computador e escreve no papel a expressão $(x+3)(x-2)$ que verifica algebricamente ter os mesmos zeros que a função do gráfico dado. Como neste gráfico a concavidade está voltada para baixo, ela opta por representar a simétrica da anterior pedindo ao Rui que introduza a função $y=-(x+3)(x-2)$, verificando que o gráfico obtido no computador é idêntico ao dado no papel.

Em resumo, na tradução da representação gráfica para a algébrica, a Ana utiliza os zeros da função como referência para definir a representação algébrica que é elaborada com base na expressão geral $y=(x+a)(x+b)$, estabelecendo uma correspondência entre as abcissas dos pontos e as constantes *a* e *b*. Ela consegue utilizar esta representação com sucesso quando a parábola tem a concavidade voltada para cima. Quando a concavidade está voltada para baixo, a Ana utiliza uma estratégia semelhante à anterior e depois afecta a expressão do sinal menos. Parece assim que a Ana utiliza a representação da parábola com a concavidade voltada para cima como protótipo deste tipo de representação.

No grupo Gama, a representação algébrica do gráfico da figura 5.20 é elaborada, pela Marta, com base nos zeros identificados no gráfico: "os zeros a gente já sabe. (...) Considerando este um e este dois, três quatro, cinco [conta os traços no eixo dos *XX*] podemos traçar por exemplo $(x-1)(x-5)$". O tipo de representação algébrica utilizado é o que foi abordado em actividades anteriores, e a Marta consegue formalizá-lo com sucesso. Também quando é pedida uma expressão algébrica para o gráfico da figura 5.21, a Marta volta a utilizar o mesmo tipo de representação que ela define como "abre parentesis... menos *x* menos três fecha, vezes *x*... mais..., não, *x* menos... dois [$(-x-3)(x-2)$]". A Marta consegue assim representar a parábola com a concavidade voltada para baixo a partir da representação algébrica factorizada e utiliza o valor da ordenada na origem para confirmar o gráfico obtido.

Em resumo, na tradução da representação gráfica para a algébrica, a Marta identifica os zeros a partir da representação gráfica e estabelece uma correspondência entre as abcissas destes e as constantes de expressão $(x+a)(x+b)$. Este procedimento revela, no entanto, uma compreensão bastante boa da representação algébrica e da sua conjugação com a gráfica, conseguindo a Marta definir as parábolas que apresentam a concavidade voltada para baixo a partir da relação entre os zeros e o sinal do monómio em x^2.

No grupo Delta, ao pretender definir uma expressão algébrica para o gráfico da figura 5.20, a Joana utiliza os pontos de intersecção com o eixo das abcissas:

J- $x+1$ a multiplicar por $x+4$... Não isso não pode ser.

[O Bruno começa a introduzir a expressão na forma x^2+5x+4 e o entrevistador sugere:]

Ent- Podes escrever na forma de produto.

J- Não. Mas não podia ser *x* menos. Tinham que ser os dois negativos para depois darem positivos se anulassemos.

Ent- Então, como é que tinha que ser?

J- *x-1* vezes *x-4*.

Embora a Joana não tenha feito uma leitura correcta das abcissas dos pontos onde o gráfico corta o eixo dos *XX*, ela parece estabelecer uma correspondência directa entre essas abcissas e as constantes da representação algébrica apresentada na forma de produto de factores. Ela parece fazer uma abordagem algébrica já que antes de traçar o gráfico verifica que a expressão não serve e acaba por alterá-la para $(x-1)(x-4)$. Esta alteração parece ter por base a concretização da variável independente, pois a Joana vai substituir o *x* da representação algébrica pelo valor dos zeros que identificou no gráfico.

Quando se pretende uma expressão algébrica para traduzir o gráfico da figura 5.21, a Joana volta a identificar os pontos de intersecção com o eixo dos *XX* e parece utilizar a expressão anterior como modelo:

J- Pode ficar *x-2* a multiplicar *x+3*.

Ent- Ora traça lá então para ver o que é que dá?

B- Não, não dá [O Bruno não traçou o gráfico].

Ent- Não?

B- Pode ser ou com menos ou com mais no dois.

J- Não o dois ... O dois tem que ser negativo aqui, porque depois se nós formos achar os zeros passa a positivo. E o três tem que ser positivo porque depois se nós formos achar os zeros tem que...

B- Não pode ser senão dava ao contrário. Dá três e dois [introduz e traça $y=(-x-3)(x-2)$]

A Joana continua a utilizar o mesmo tipo de raciocínio algébrico que tinha desenvolvido no caso anterior sem ter em conta o sentido da concavidade da parábola. Ela parece apenas preocupada com o processo que envolve a concretização da variável por forma que cada um dos factores seja nulo. O Bruno para além desse processo consegue relacionar a representação obtida com o gráfico dado por forma a que a nova expressão algébrica, para além de passar nos mesmos pontos, tenha a concavidade voltada para baixo.

Em resumo, para a Joana a tradução da representação gráfica para a algébrica é estabelecida a partir da identificação dos zeros da função no gráfico dado, sendo posteriormente estabelecida uma relação directa entre as abcissas destes pontos e as constantes da expressão *(x+a)(x+b)*. A Joana utiliza processos algébricos para confirmar se a expressão obtida representa o gráfico pretendido. Estes processos baseiam-se na concretização da variável independente, mas não têm em atenção algumas propriedades gráficas, como por exemplo o sentido da concavidade da parábola. O Bruno, embora não explicite o seu raciocínio, consegue relacionar as duas representações, definindo o sentido da concavidade e os zeros a partir da expressão anteriomente introduzida.

4.3.3 - O caso da função módulo

Nesta secção são analisadas as abordagens algébricas que os alunos fazem ao pretender definir a função módulo como uma função definida por ramos. Esta abordagem tinha sido desenvolvida nas aulas, mas sem a ajuda do computador. Este tipo de representação parece ser de mais difícil abordagem uma vez que o seu estudo no computador não era viável. Ele envolvia processos complicados, que se estendiam para além do tempo disponível para efectuar o estudo Ao pretender estabelecer uma representação algébrica para gráficos de funções que são o módulo de funções quadráticas, sem utilizar o símbolo de valor absoluto, os alunos encontraram algumas dificuldades em explicitar a expressão algébrica para diferentes partes do domínio, acabando por fazer uma abordagem com base na definição matemática de módulo e no gráfico representado no computador.

No grupo Alfa, ao pretender representar algebricamente o módulo do gráfico da figura 5.22, cuja expressão analítica é dada por *(x+3)(x-2)* e o gráfico pela figura 5.23, a Susana considera que:

> *(x-2)(x+3)* é maior ou igual a zero de menos infinito a um valor dali... [aponta o ponto (-3,0) no gráfico] ao menos três e de dois a mais infinito. E será *(x-2)(x+3)*... Ai, não. Depois [é] o simétrico da expressão entre menos três e dois

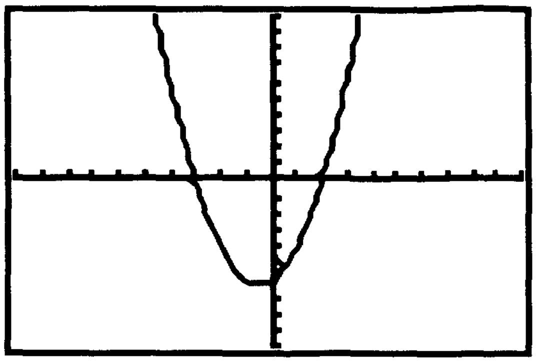


Figura 5.22

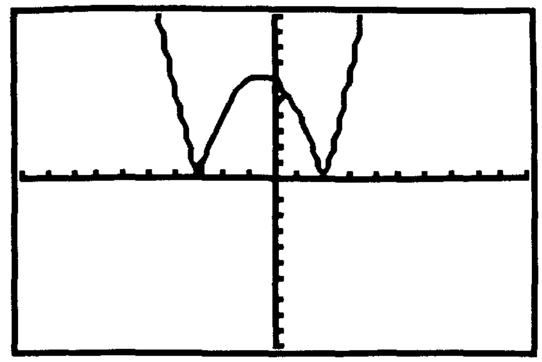


Figura 5.23

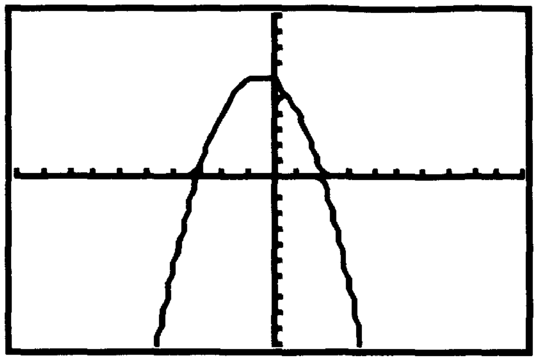
A Susana, ao tentar definir a expressão analítica em cada um dos ramos da função, consegue distinguir correctamente no gráfico os intervalos do domínio com representações diferentes, utilizando implicitamente a definição matemática de módulo.

Na sequência da entrevista, embora a representação algébrica pareça ter sido compreendida a Susana tem algumas dúvidas com a lógica envolvida nesta: "posso dizer que isto é uma conjunção de condições, a própria chaveta é um *e* ($\wedge$), não é?". Mesmo não tendo sido referido o facto de os diferentes ramos da função poderem ser representados numa chaveta, a Susana parece recordar esta representação que foi feita nas aulas.

Em resumo, para a Susana a tradução da representação gráfica para a algébrica da função módulo é baseada na representação algébrica da função sem módulo, sendo esta mantida quando a função é positiva e tomando o seu simétrico quando ela é negativa. Ela consegue definir correctamente o domínio de cada um dos ramos, mas tem algumas dúvidas com a lógica envolvida na definição destes intervalos. A expressão analítica é abordada, em termos genéricos, não havendo a preocupação de fazer a sua apresentação formal.

O gráfico da figura 5.25 resulta do da figura 5.24 tomando-o em módulo, e a sua representação algébrica é definida por $y=|(-x-3)(x-2)|$. No grupo Gama, quando se pretende definir uma representação algébrica para este gráfico sem utilizar o símbolo de valor absoluto, a Marta argumenta que:

> Íamos achar os valores dos zeros (...) São menos três e dois e dizíamos que os ... os... *(-x-3)(x-2)* era maior que zero se *x* fosse menor... Fosse no intervalo de menos infinito a menos três... Se *x* pertencesse ao intervalo de menos infinito a menos três fechado união com o de dois a mais infinito



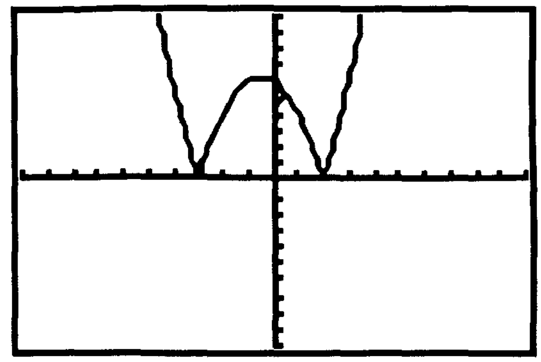


Figura 5.24 Figura 5.25

A Marta parece estar a interpretar o gráfico do módulo da função identificando os intervalos onde ele é positivo, não conseguindo explicitar o seu raciocínio. Posteriormente, ela acaba por definir a forma como poderia apresentar a representação algébrica fazendo uma abordagem global baseada no gráfico representado no computador "fica igual entre os zeros e fica o simétrico no intervalo fora dos zeros".

Em resumo, para a Marta, a tradução da representação gráfica para a algébrica tem por base a representação algébrica da função sem utilizar o símbolo de módulo. Ela identifica os intervalos onde a função é positiva e negativa e faz uma abordagem global sem formalizar a representação algébrica em cada um dos intervalos. A representação gráfica do módulo parece assumir um papel fundamental na identificação das propriedades deste tipo de funções.

No grupo Delta, quando se pede para representar algebricamente o gráfico da figura 5.23, que representa o módulo da função *y=(x+3)(x-2)* cujo gráfico é dada pela figura 5.22, sem utilizar o símbolo de valor absoluto, o Bruno vai tentar escrever essa representação no computador:

> Faz-se um módulo inventado. Faz o mesmo que o módulo só que não é uma chaveta (...) É a raíz quadrada do quadrado. Vai fazer o quadrado [o computador] e depois faz a raíz quadrada. Se for negativo passa a positivo e depois a raíz quadrada dá o mesmo

Ele vai utilizar o computador para introduzir a representação algébrica e, como não consegue introduzir directamente uma função definida por ramos, acaba por conjugar algumas funções que não foram abordadas nas aulas, conseguindo definir numa única expressão algébrica a função módulo a que ele chama "um módulo inventado". O Bruno parece apresentar uma capacidade de relacionar as duas representações por forma a conseguir a expressão pedida. Ele parece revelar, ainda, um bom domínio algébrico do quadrado e da raíz quadrada. A Joana, por sua vez, recorre ao processo que tinha sido abordado nas aulas:

> Se *x* for maior que zero fica na mesma, porque ela está a crescer (...) Então podemos dizer sempre que se *x* for maior que zero fica assim [a mesma expressão algébrica]. E se *x* for menor que zero fica o simétrico

Ela parece, no entanto, estar a servir-se do gráfico estudando o seu sinal e refere-se à variável *x* fazendo a leitura no eixo dos *YY*. Assim, ela pretendia estabelecer que se as imagens fossem positivas a expressão mantinha-se igual e se as imagens fossem negativas a expressão seria a simétrica. Esta abordagem não lhe parece satisfatória pelo que ela opta por fazer uma mais global:

> Se a gente quisesse escrever isto no papel ficava: se *x* for o intervalo de menos infinito a menos três reunião com dois a mais infinito ficava assim [mesma expressão algébrica]. Se *x* ficar no intervalo de menos três a dois fica o simétrico

Esta abordagem parece ter por base a análise dos dois gráficos representados no computador e a explicação matemática da função módulo.

Em resumo, na tradução da representação gráfica para a algébrica, o Bruno e a Joana utilizam estratégias diferentes. O Bruno prefere expressões algébricas que possam ser directamente representadas em computador, pelo que recorre a funções que ainda não foram formalmente estudadas, apresentando assim um método próprio para definir algebricamente funções sem utilizar o símbolo de módulo. A Joana prefere utilizar a expressão que define a função sem módulo ou a sua simétrica consoante a função é positiva ou negativa e aponta correctamente os intervalos do domínio onde cada uma das expressões anteriores definem a função.

5 - Resolução de equações e inequações a partir da sua representação gráfica

A resolução de equações e inequações, a partir da representação gráfica, permite resolver problemas que por processos algébricos seriam difíceis de trabalhar. Este tema tem sido caracterizado por uma forte componente algébrica ao longo dos vários currículos que têm vindo a ser implementados. Uma vez que os alunos desenvolveram, ao longo deste estudo, outras formas de representar e interpretar algumas expressões algébricas, pretende-se, nesta secção, caracterizar a forma como eles utilizam a representação gráfica em apoio à resolução de equações e inequações. Ao longo das aulas, este processo também foi utilizado havendo o cuidado de o relacionar com a resolução algébrica. Embora os alunos façam uma abordagem, essencialmente gráfica, precisam recorrer à conjugação desta representação com a algébrica e pontual para poder obter as soluções que satisfaçam os problemas propostos.

5.1 - Equações e inequações que envolvem funções afins

Quando se trata de equações e inequações associadas a funções afins, alguns alunos recorrem à resolução algébrica como forma de encontrar as soluções. Ao utilizar a representação gráfica surgem algumas dificuldades relacionadas com a identificação das coordenadas dos pontos onde as funções se intersectam e com a identificação do eixo onde vão fazer a leitura por forma a encontrar as soluções pretendidas. Neste processo exige-se a competência de passar graficamente de imagens para objectos. Para se caracterizar a forma como os alunos resolvem equações e inequações associadas a funções afins foi pedido, aos alunos, para traçarem os gráficos das funções $f(x) = 2x+4$, $g(x) = x -2$ e $h(x) = x+1$, sendo posteriormente estabelecidas comparações destas funções entre si e com funções constantes dadas.

No grupo Alfa, ao pretender resolver a inequação $f(x)>2$ (figura 5.26), a Susana faz uma abordagem baseada na representação gráfica:

S- [$f(x)>2$ é] quando x for maior que um [vê no gráfico representado no computador].

Ent- [Reptindo] Quando x for maior que um. Onde é que estão os pontos de $x>1$?

S- É aqui [indica no computador a abcissa do ponto (-1,0)].

Ent- Aqui é um?

S-É... Ai ,aí? Quando x for maior que menos um.

Ent- [Repetindo] Quando x for maior que menos um. Como é que tu pensaste?

S- Então vi a imagem, tem que ser maior que dois. Se ela no menos um é igual a dois, então, tem que ser maior que dois, o objecto tem que ser maior que menos um.

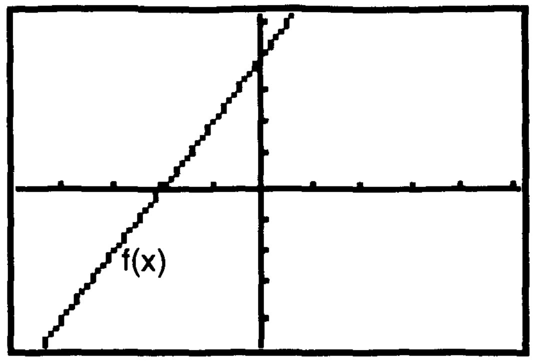


Figura 5.26

A Susana consegue, a partir da representação gráfica, definir o conjunto solução da inequação. Embora não tenha considerado o valor relativo da abcissa, consegue identificar no gráfico os objectos a partir das imagens. Ela é, assim, capaz de traduzir informação algébrica *f(x)>2,* para uma representação gráfica e nesta consegue passar de imagens para objectos. Quando se pede para resolver a inequação *f(x)>h(x)* (figura 5.27), a Susana inicialmente afirma que não é possível resolver esta inequação graficamente, porque "a gente não tem a continuidade das rectas". É de salientar que ela não se estava a referir ao conceito de continuidade matemática, pois só virá a ser leccionado mais tarde. Aqui, a palavra continuidade refere-se à continuação das rectas.

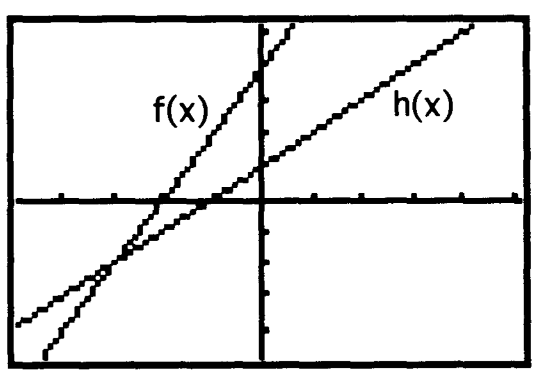


Figura 5.27

A Susana parece ter hesitado em fazer afirmações sobre partes dos gráficos não apresentados.

No entanto,acaba por resolver a inequação a partir da representação gráfica presente no ecrã:

S- Quando é que a *f* é maior que a *h*? Então, é daqui para a frente [indica o ponto (-3,0) no gráfico].

Ent- [Repetindo] daqui para a frente. Então é a partir de quanto?

S- É a partir do ponto três a mais infinito.

Ent- [Tom de dúvida]Será de três a mais infinito?

S- Acho que sim.

Ent- Este ponto qual é? É o ponto três?

S- Menos três;eu estou a trocar os sinais (...) menos três a mais infinito.

A Susana continua a considerar os valores das abcissas sem ter em atenção o seu valor relativo. Tal facto parece não ser muito relevante para o seu raciocínio, estando mais preocupada com a comparação dos gráficos por forma a comparar as suas imagens.

Em resumo, na resolução gráfica de inequações, a Susana utiliza os gráficos respectivos e consegue relacionar as variáveis independente e dependente por forma a definir correctamente o conjunto solução. Ela consegue traduzir informação algébrica em gráfica e, com base no gráfico, consegue passar de imagens para objectos. Na identificação dos pontos de intersecção ela utiliza como referência a abcissa do ponto.

No grupo Gama, ao pretender resolver a inequação $f(x)>2$, a Marta prefere fazer uma abordagem algébrica, como foi seu hábito ao longo das entrevistas:

Ent- Sim. Quando é que $f(x)$ é maior que dois?

M- Maior que dois. Então [efectua os cálculos algébricos mentalmente] maior que dois... Então maior que menos dois ... x ... $2x$ menor que menos ... dois ... dá $x<1$.

A Marta não espera que o João trace o gráfico e tenta resolver a inequação algebricamente, acabando por ter alguns problemas nas operações com os sinais. Quando se pede para justificar como poderíamos resolver graficamente a inequação, eles vão utilizar o gráfico representado no computador (figura 5.26):

Ent- Graficamente, o que é que vocês vão procurar?

M- Os valores de x... hum... x ...

Ent- [Repetindo] maior que dois.

M- Graficamente ... maior que dois. Então vamos ver ... $f(x)$, não é? Maior que dois? ... Então ,vamos ver quando é que as imagens são superiores a dois.

Ent- [Repetindo] quando é que as imagens são superiores a dois. Exacto.

M- Aqui já é [indica no gráfico o ponto (0,2)].

Ent- E é aonde? A partir de que valor? O que é que acham?

J- A partir do... Da imagem dois.

M- Por exemplo, aqui já é... A partir do valor $x+2$.

A Marta e o João vão identificar a porção do eixo dos *YY* onde estão as imagens que satisfazem a inequação, acabando por definir o conjunto solução a partir da leitura dos valores dessas imagens. Embora anteriormente a Marta tivesse definido uma solução algébrica, em termos dos valores de x, ela parece não conseguir relacionar a solução anterior com a representação gráfica, acabando por definir uma solução onde associa a variável x com a ordenada dois, a partir da leitura feita no eixo dos *YY*.

Na sequência da entrevista, depois de ter concluído que as soluções da inequação são os valores dos objectos, a Marta, continua a ter algumas dificuldades em relacionar as representações algébrica e gráfica:

M- Graficamente, nós vamos aqui à imagem dois e vamos ver ... onde é que está o objecto...

Ent- Hum...

M- Vai dar menosum.

M- [Para resolver] Algebricamente ... [temos que saber] quando é que $f(x)$ é maior que dois. Temos que ir substituir o x por dois.

O facto de, na representação gráfica, ter que recorrer à imagem para identificar o objecto parece causar algumas dificuldades na resolução algébrica onde a Marta parece fazer um estudo comparativo acabando por supor que tem que calcular a imagem de dois.

Só depois de ter observado a recta constante $y=2$ (figura 5.28) o João consegue resolver graficamente a inequação $f(x)<2$, concluindo que o conjunto solução é o intervalo $]-\infty,-1[$.

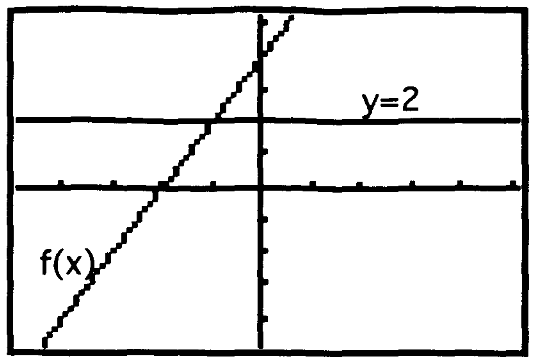


Figura 5.28

Quando se pede para resolver a inequação *g(x)<-1* (figura 5.29), o João e a Marta utilizam estratégias diferentes:

J- [É] Quando o objecto é dois.

Ent- [Repetindo] quando o objecto é...

J- É dois.

Ent- Estão de acordo? Portanto, como é que fizeste ou como é que pensaste?

M- Então nós vamos igualar a dois a expressão e fizemos as contas.

Ent- Sim, algebricamente. E graficamente como é que vocês podiam ver?

M- Traçávamos a recta paralela no ponto menosum.

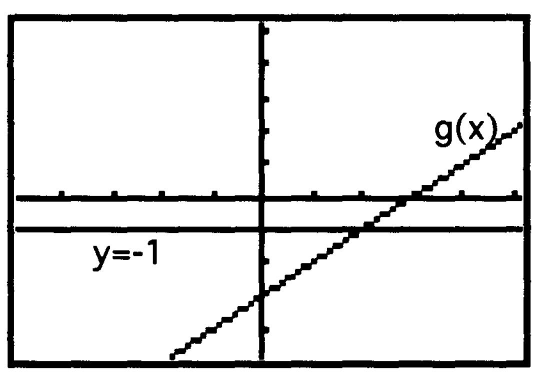


Figura 5.29

Enquanto o João faz uma resolução gráfica, identificando a solução da equação *g(x)=-1*, a Marta prefere utilizar argumentos algébricos, embora consiga definir uma estratégia para resolver graficamente a inequação. Ela utiliza a representação gráfica da recta constante *y=-1* considerando depois os valores de *x* cujas imagens estão abaixo desta recta.

Em resumo, na resolução de equações e inequações, a Marta e o João utilizam estratégias diferentes. O João teve vários problemas e só com o apoio visual da recta *y=2* é que conseguiu visualizar a passagem do ponto dois no eixo dos *YY* para o ponto menos um no eixo dos *XX*. Ele parece preferir utilizar argumentos gráficos que privilegiam a representação de rectas horizontais para poder comparar graficamente uma função com uma constante. A Marta utiliza, predominantemente, uma abordagem algébrica que tem por base a resolução mental da equação ou inequação. Ela também consegue utilizar argumentos gráficos, mas tem alguma dificuldade em relacionar as variáveis por forma a passar das imagens para os objectos. No entanto, ela verificou que o problema era converter imagens em objectos e depois de recordar que os objectos estão no eixo dos *XX* conseguiu fazer a passagem com sucesso.

No grupo Delta, quando se pretende resolver a inequação *f(x)>2* (figura 5.26), o Bruno começa por fazer uma abordagem algébrica, resolvendo mentalmente a inequação. Quando se pede para fazer uma interpretação gráfica, a partir do gráfico já representado no computador, a Joana sugere que se represente graficamente a outra função envolvida:

J- Passávamos uma recta paralela aqui ao dois e depois víamos.

Ent- Como? Paralela como?

B- *x* tem que dar maior que menos um. Isto ia dar menos um maior que... [representa graficamente *y=2*] Pois para cá [refere -se a valores de *x* maiores que menos um].

O Bruno consegue identificar o segundo membro da desigualdade como sendo a recta *y=2* e faz o estudo da inequação com base na comparação dos dois gráficos, definindo correctamente o conjunto solução. Quando se pretende resolver a inequação *f(x)>h(x)* (figura 5.27), o Bruno também faz uma interpretação gráfica: "é deste ponto aqui, menos infinito, até àquele ponto que é menos dois, mais ou menos". Embora no caso anterior ele tenha utilizado correctamente a representação gráfica, nesta situação faz a leitura do conjunto solução no eixo dos *YY*, acabando por resolver a inequação *f(x)<h(x)*. Tal parece ser condicionado pelo facto de nenhuma das rectas ser horizontal, acabando por definir o conjunto solução em termos das imagens. A Joana, entretanto, verifica que anda à procura dos valores dos objectos e argumenta que "não é neste eixo, tem que ser no eixo dos *XX*", definindo correctamente como conjunto solução o intervalo real]-3, +∞[.

Em resumo, o Bruno utiliza preferencialmente a representação gráfica na resolução de inequações identificando gráfica e algebricamente o conjunto solução, desde que se trate da comparação de uma função qualquer com uma função constante. Quando se pretede comparar dois gráficos quaisquer, não horizontais, ele acaba por ter algumas dúvidas na definição do conjunto solução referindo-o em termos de valores do eixo dos *YY*.

5.2 - Equações e inequações que envolvem funções afins e quadráticas

No caso de equações e inequações que envolvem funções quadráticas não há dificuldades quando se trata de interpretar o seu sinal. A resolução algébrica aparece com menos frequência, uma vez que envolve cálculos mais complicados e os alunos conseguem falar dos pontos de intersecção das várias funções sem explicitar as suas coordenadas. De uma forma geral as representações gráficas são interpretadas tendo em conta a parte do domínio que é visualizada.

No grupo Alfa, quando se pede para estudar o sinal das funções quadráticas, a Susana faz uma interpretação essencialmente gráfica. Assim, quando se pede para indicar onde as funções *f(x)* e *g(x)* são positivas (figura 5.30), ela utiliza os gráficos traçados no computador e afirma que *f(x)* é sempre maior que zero enquanto que *g(x)* só é positiva entre os seus zeros.

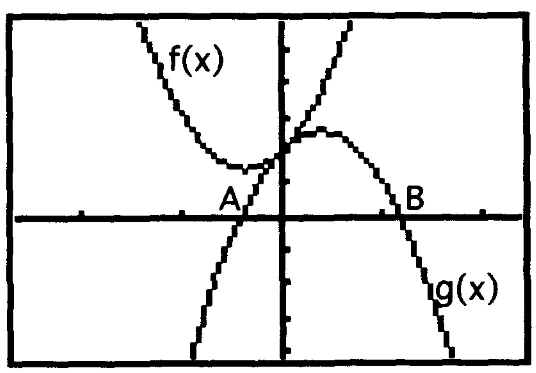


Figura 5.30

Embora a Susana esteja a utilizar preferencialmente a representação gráfica, ela consegue relacioná-la com a algébrica, pois quando se pretende saber se há algum ponto onde as duas funções sejam iguais ela argumenta que " é o ponto dois... É o ponto onde a parábola intersecta o eixo das ordenadas que corresponde ao *c*". Ela consegue arranjar argumentos algébricos para a resolução da equação sem ter que recorrer ao cálculo, embora esteja a relacionar esta representação com a gráfica.

Quando se pede para resolver a inequação $k(x)>j(x)$ (figura 5.31), a Susana acaba por comparar as duas funções sem ter em conta o seu domínio de existência:

> É desde aqui [abcissa menos três] até aqui, [abcissa de *A*] (...) Ah, depois daí para a frente, [abcissa dois] portanto... até... Não até... sei lá, cinco, ela [*k(x)*] é sempre maior porque a outra é negativa

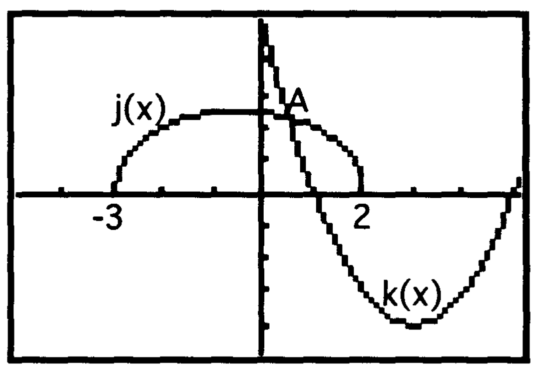


Figura 5.31

A Susana acaba por comparar as duas funções fora do domínio de uma delas considerando que no intervalo]2,5[a função $k(x)$ é maior do que a $j(x)$. Embora anteriomente ela tenha feito uma interpretação gráfica, aqui parece entrar em conflito com essa representação. Tal abordagem parece ter por base a representação algébrica de $j(x)$ que resulta da raíz quadrada da expressão $-x^2-x+6$ e cujo domínio é o intervalo [-3,2]. Como para valores de x maiores que dois a função toma valores negativos e a sua raíz quadrada não está definida, a Susana considera que é a outra, $k(x)$, que deve ser maior, mas só admite esta relação no intervalo real onde a função $k(x)$ é negativa. Quando se pede para explicar o que se passa com a função j, a partir do ponto de abcissa dois, a Susana continua a comparar as duas funções mesmo verificando que $j(x)$ não tem representação gráfica:

S- Não existe [$j(x)$].

Ent- Não existe. Então...

S- Tem um interrompimento.

Ent- Então como é que é? Qual é que é maior?

S- A primeira [$k(x)$].

Ent- Porquê?

S- Então se a outra não existe...

A Susana parece não conseguir gerir este conflito, a partir da representação gráfica, pois compara as funções mesmo onde elas não estão definidas. Ela parece não ter a preocupação de associar o domínio às funções, pois todas as que tinham sido estudadas no computador tinham por domínio $\Re$.

Quando as funções têm por domínio $\Re$, a Susana não parece ter dificuldades com a resolução gráfica das equações e inequações. Assim, quando observa o gráfico da figura 5.32, ela considera que as funções são iguais nos "pontos" "zero" e "quatro", que a afim é maior do que a quadrática entre estes pontos e menor "de menos infinito até zero e de quatro a mais infinito".

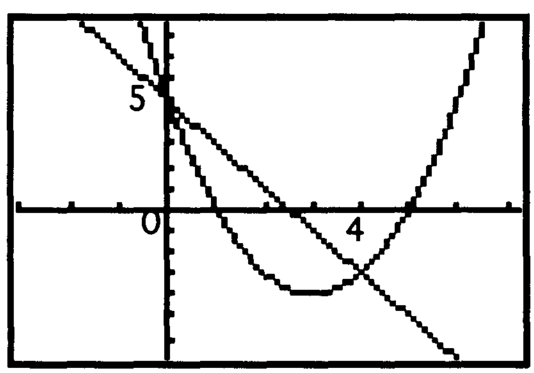


Figura 5.32

Ela faz uma abordagem gráfica onde consegue fazer uma leitura correcta dos intervalos, onde a afim é maior e menor do que a quadrática, bem como dos pontos onde as duas funções são iguais. Os pontos parecem ser aqui interpretados em termos do conjunto solução, sendo apenas considerada a sua abcissa.

Em resumo, a Susana utiliza correctamente a informação gráfica na resolução de equações e inequações desde que estas tenham por domínio $\Re$. Além deste processo, ela consegue referir características algébricas dos gráficos que lhe permitem identificar determinados pontos particulares que acaba por referir designando apenas as suas abcissas. Esta forma de referir os pontos não traz quaisquer problemas e parece estar relacionado com a forma como é geralmente apresentado o conjunto solução. Quando se trata de situações gráficas onde o domínio das funções pode ser dado por subconjuntos de $\Re$, a Susana parece entrar em conflito com a representação gráfica, acabando por comparar as funções mesmo onde a gráfico não está definido, admitindo que pelo facto de uma das funções não existir a outra é maior.

No grupo Beta, quando se pede para resolver a inequação *f(x)>0* (figura 5.33), a Ana parece fazer uma abordagem gráfica global das funções representadas no ecrã do computador: "[é o intervalo que se situa] entre os pontos onde elas se intersectam".

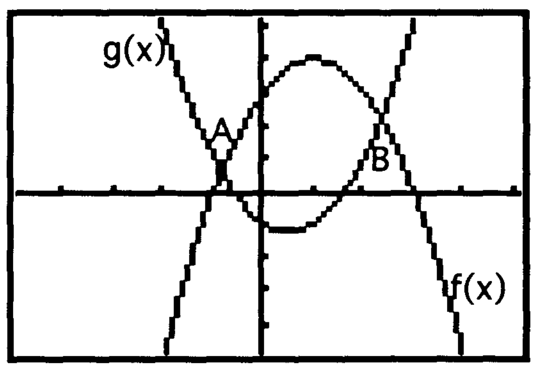


Figura 5.33

A Ana acaba por resolver a inequação *f(x)>g(x)* não lhe dando uma solução formal, pois considera os "pontos" sem referir se se trata das abcissas ou ordenadas. No entanto, o Rui tem em atenção a questão colocada e completa a resposta dizendo que é "entre os seus zeros". O Rui também não define formalmente o intervalo, contudo parece referir-se aos valores de *x*. Também quando se pretende saber quando é que a função *f(x)* é negativa, o Rui considera que "é na reunião dos dois intervalos que estão fora dos zeros". Ele consegue fazer uma interpretação gráfica das funções que lhe permite definir correctamente o conjunto solução das inequações, não parecendo limitar-se à parte visível do gráfico. A Ana, ao pretender resolver a inequação *h(x)>i(x)* (figura 5.34), argumenta que "[*h(x)*] nunca é [maior do que *i(x)*]. O conjunto solução é o vazio".

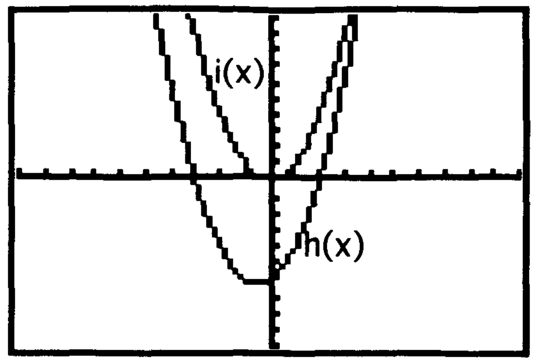


Figura 5.34

Embora não tenha sido questionada, ela parece considerar apenas a parte visível do gráfico, não discutindo a possibilidade de os gráficos poderem vir a intersectar-se para além da zona visível do ecrã.

Quando se pretende resolver a inequação $j(x)>k(x)$ (figura 5.31), a Ana continua a fazer uma interpretação gráfica e argumenta que "[é] neste intervalo, daqui [abcissa de A] aqui [$x=2$], até ao dois". Quando se pretende saber o que se passa a partir do ponto de abcissa dois, ela considera que "não há relação porque a função já não existia, já não existem valores de *x* nem de *y*". A Ana parece ser coerente na interpretação dos gráficos considerando que não é possível compará-los se um deles não está definido.

Em resumo, na resolução de equações e inequações, a Ana faz uma abordagem em termos das representações gráficas dadas no ecrã do computador, o que lhe permite determinar correctamente o conjunto solução. Em geral, ela parece utilizar apenas a parte visível dos gráficos não discutindo a possibilidade de estes não terem o mesmo comportamento para além da zona visível do ecrã. O Rui utiliza os zeros da função quadrática como forma de estudar o seu sinal, mas não tem a preocupação de os formalizar, pelo que a abordagem que faz é essencialmente gráfica.

No grupo Gama, a Marta interpreta o sinal da função quadrática com base na representação gráfica. Quando pretende resolver a inequação $f(x)>0$ (figura 5.35) ela considera que "é sempre menor que zero, excepto no intervalo entre os seus zeros", utilizando para tal a representação gráfica do ecrã do computador.

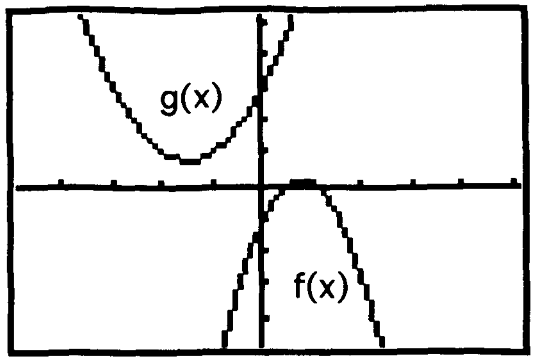


Figura 5.35

Também quando se pretende saber quando é que $f(x)<g(x)$ (figura 5.35), a Marta volta a utilizar a repesentação gráfica:

M- Eu acho que ela é sempre menor ...

Ent- Tu achas que ela é sempre menor. Concordas João? ... Porquê?

J- Porquê é que é sempre menor? ...

M- Porque o valor das imagens é sempre menor... Porque aqui o vértice da parábola [*f(x)*], que neste caso é o ponto mais alto tem um valor menor do que o vértice desta parábola [*g(x)*] que é o valor mais baixo.

A Marta consegue resolver a inequação por resolução gráfica que é feita com base no valor das imagens e tendo em atenção a posição dos extremos das funções.

No gráfico da figura 5.36, quando se pede para indicar quando é que as duas funções são iguais, a Marta serve-se da representação gráfica e indica que é "neste [indica no gráfico o ponto *A*] e neste [indica no gráfico o ponto *B*]".

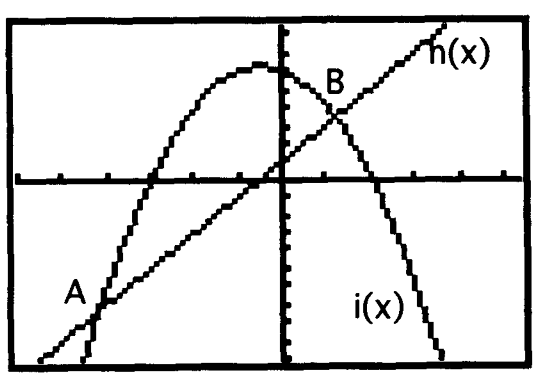


Figura 5.36

Ela faz uma interpretação gráfica, não especificando as abcissas dos pontos na sua interpretação. Entretanto, quando pretende resolver a inequação *h(x)>i(x)* ,ela define o conjunto solução tendo em consideração que se trata de valores do eixo dos *XX* "então é daqui para a frente [abcissa de *B*] (...) Ah! E lá atrás também... de menos infinito a... este [abcissa de *A*]". Embora, por vezes, a análise feita a partir dos gráficos possa trazer algumas dificuldades na interpretação do conjunto solução, a Marta parece conseguir representá-lo mesmo fazendo uma abordagem gráfica.

Em resumo, ao pretender resolver equações e inequações, a partir dos gráficos das funções envolvidas, a Marta faz uma interpretação essencialmente gráfica, especificando o conjunto solução com base nessa interpretação. Embora compare os gráficos, em termos da posição das suas imagens, ela acaba por referir as soluções como sendo intervalos definidos sobre o eixo dos *XX*, cujos extremos estão relacionados com características gráficas, como por exemplo os zeros ou os pontos de intersecção dos gráficos. Neste tipo de situações, ela parece apresentar uma visão mais sólida da abordagem gráfica relativamente à apresentada aquando da função afim.

No grupo Delta, quando se pretende estudar o sinal da função quadrática representada pelo gráfico da figura 5.37, o Bruno considera que a função é positiva "de dois a mais infinito e de menos infinito a menos três".

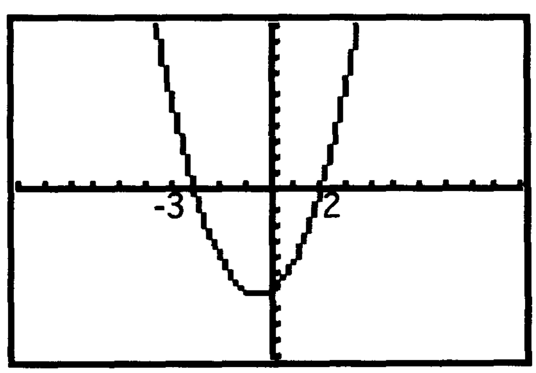


Figura 5.37

Embora ele faça uma interpretação gráfica, consegue identificar as abcissas dos pontos utilizando-as na definição do conjunto solução. Já quando se pretende saber quando é que a função é negativa, a Joana também faz uma interpretação gráfica e afirma que é "no intervalo entre eles [os zeros]". Ela refere-se ao conjunto solução sem ter a preocupação de definir os extremos do intervalo. Este tipo de abordagem é o mais utilizado, ao longo das aulas, quando se pretende estudar o sinal da função quadrática.

Tal como já tinha acontecido na situação anterior, ao pretender resolver a inequação *f(x)>g(x)* (figura 5.38), o Bruno volta a indicar os extremos do intervalo real que definem o conjunto solução, afirmando que "é daqui, neste intervalo, de... menos três a dois aberto dos dois lados".

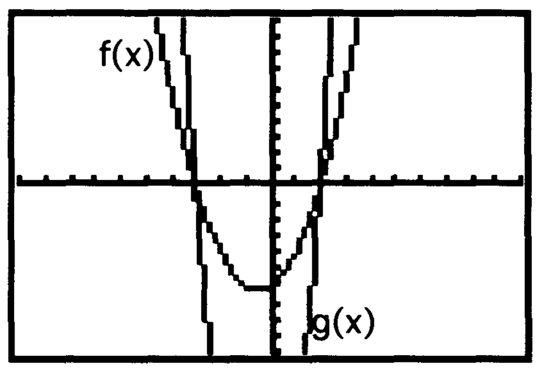


Figura 5.38

Embora ele utilize a representação gráfica e faça a maior parte das resoluções anteriores, a partir da visualização dos gráficos, tem a preocupação de definir o conjunto solução utilizando uma linguagem detalhada.

Quando se pretende resolver a inequação representada pelo gráfico da figura 5.39, por forma a saber quando é que a parábola é maior do que a função afim, o Bruno afirma que "[é] daquele valor para cima [indica a abcissa de *B*]. (...) De seis a mais infinito".

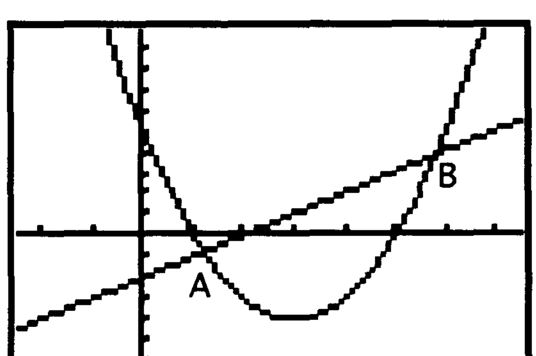


Figura 5.39

Ele continua a apresentar o conjunto solução na forma de intervalo real. No entanto, não refere o que se passa no restante domínio da função. A Joana, entretanto, verifica que há mais pontos onde o gráfico da função quadrática está acima da afim e afirma que "é daqui até aqui [indica os pontos da parábola que se situam na parte visível do gráfico até ao ponto *A*]". A Joana parece estar a considerar as imagens da função quadrática que estão acima do gráfico da função afim para soluções da inequação. O Bruno acaba por completar a resposta argumentando que são os valores do intervalo de "menos infinito até aqui [abcissa de *A*]".

Em resumo, o Bruno, ao fazer uma interpretação gráfica na resolução de inequações, acaba por apresentar o conjunto solução na forma de intervalo real, identificando sempre os extremos do intervalo. A Joana parece fazer uma abordagem mais global, referindo-se aos extremos do intervalo sem os identificar e, por vezes, ao comparar as funções parece considerar que os valores procurados são as imagens dos gráficos e não os objectos que dão origem a essas imagens.

CAPÍTULO VI

CONCLUSÕES

Recordemos que esta investigação tem por objectivo geral investigar como os alunos, que aprendem sobre funções com o auxílio de meios computacionais, compreendem o conceito de função.

Mais especificamente, pretende-se: a) caracterizar o conceito de função dos alunos quando estudam funções envolvendo as suas diferentes representações; b) caracterizar os processos utilizados pelos alunos na tradução entre as diferentes representações e c) caracterizar os processos que os alunos utilizam na resolução de equações e inequações a partir da correspondente representação gráfica.

Assim, neste capítulo apresentam-se as principais conclusões deste estudo que emergiram dos dados recolhidos na observação das aulas e das entrevistas realizados com os alunos. Elas estão estruturadas de acordo com os objectivos do estudo, e são apresentadas a partir de afirmações que pareceram traduzir as abordagens mais significativas protagonizadas pelos alunos.

Por fim apresentam-se algumas recomendações que decorrem do desenrolar do estudo e dos seus resultados.

1 - Caracterização do conceito de função

Função é uma correspondência unívoca ou uma fórmula

Uma função é uma correspondência que se estabelece entre os elementos de dois conjuntos. Esta correspondência é caracterizada por fazer corresponder a cada elemento do primeiro conjunto um único elemento do segundo. Esta é a principal característica que os alunos invocam quando pretendem decidir se uma dada representação (algébrica, gráfica ou pontual) é ou não uma função. Este critério é utilizado independentemente da representação dada. Embora ele pareça ter aspectos mais relacionados com a representação tabular ou pontual, os alunos utilizam-no mesmo quando estão perante funções definidas pelos seus gráficos. Esta característica também foi identificada por Vinner e Dreyfus (Ver, por exemplo, Vinner, 1983, e Vinner e Dreyfus, 1989) como sendo um dos principais conceitos definição utilizados pelos alunos das escolas de Jerusalém. No caso concreto desta investigação, o recurso a este critério, mostra que os alunos o utilizam para além do seu valor proposicional. Eles conseguem utilizá-lo com sucesso em diferentes situações e contextos.

Quando se trata de caracterizar a correspondência que se estabelece do segundo conjunto para o primeiro, os alunos referem que esta não tem que ser necessariamente unívoca. Esta abordagem parece pressupor que eles conseguem fazer uma distinção nítida entre as duas formas de correspondência. Nalgumas situações referem mesmo o facto de esta correspondência não ter que seu unívoca, uma vez que a função não tem que ser necessariamente injectiva.

Apesar de os alunos só conseguirem traçar os gráficos no computador a partir da introdução de uma expressão algébrica, apenas dois grupos referiram explicitamente que uma função é uma fórmula ou uma expressão. Nestes casos a fórmula é referida como um processo de transformar objectos em imagens. Esta forma de caracterizar a função, parece estar implícita no raciocínio dos alunos, pelo que eles não a utilizam quando pretendem decidir se uma dada expressão representa ou não uma função. Eles parecem acreditar que as fórmulas representam sempre funções, e quando têm dúvidas recorrem para a representação gráfica, é baseada na sua representação visual e construída com base nas suas imagens mentais.

As funções são correspondências entre conjuntos numéricos

Na maior parte dos casos os alunos referem-se aos elementos dos conjuntos, entre os quais se estabelece a correspondência acima, como sendo números. Este tipo de referência dos elementos dos conjuntos parece estar relacionado com o tipo de software que foi utilizado, onde os elementos dos dois conjuntos eram sempre reais, e na maioria dos casos era o próprio conjunto $\Re$. Também ao longo das aulas, a maior parte das funções estudadas estavam definidas entre conjuntos de números. Os elementos do primeiro conjunto são quase sempre designados por objectos. Há no entanto outras designações que, embora sejam menos utilizadas também são referidas, e que são as de independente e *x*. Os elementos do segundo conjunto, normalmente referidos como imagens, também são designados por dependentes e *y*. Estas designações parecem estar de acordo com o ensino ministrado. Há no entanto uma outra nomenclatura que se reveste de especial importância quando se trata do estudo das funções e que também foi utilizada nas aulas, mas que os alunos não referiram explicitamente. Trata-se das designações de domínio e contradomínio.

Tal omissão parece estar relacionada com o facto de todas as funções estudadas no computador terem por domínio $\Re$. É de salientar que os alunos conseguem utilizar as noções de domínio e contradomínio com bastante segurança, e têm uma percepção muito clara destas quando interpretam os gráficos.

O facto de os alunos terem considerado que os elementos dos conjuntos são números não parece ser um impedimento para a sua compreensão do conceito de função. De acordo com as propostas de Sfard e Vinner (Ver, por exemplo, Sfard, 1989,1992, Vinner, 1992), o conceito deve ser introduzido com base em procedimentos operacionais, onde as funções são vistas como processos. O facto de os conjuntos serem constituídos por números parece ajudar os alunos a melhor compreender o conceito dado que utilizam procedimentos operacionais ao considerar que existem operações que permitem transformar os elementos do primeiro conjunto nos do segundo. Esta abordagem parece ser apropriada para a introdução dos conceito.

As representações algébricas são constituídas por elementos com características diferenciadas

Os alunos discriminaram o significado dos diferentes elementos constituintes das expressões algébricas, nomeadamente, a relação complexa entre variáveis e constantes, e entre os diferentes coeficientes. Esta distinção pressupõe que cada um destes elementos tem papéis bem definidos: a variável independente serve para atribuir valores que vão transformar objectos em imagens e as constantes são analisadas com base no papel que desempenham na representação gráfica. Por vezes há situações em que, pelo facto da variável independente não estar formalmente representada ($y=0$), a expressão algébrica causa algumas dificuldades na sua interpretação. Esta dificuldade parece resultar da interpretação da representação icónica e é ultrapassada quando esta representação é relacionada com outras. A variável dependente não assume papel de destaque na representação, mas os alunos conseguem relacioná-la com as imagens. Ela é o resultado da operação que é efectuada sobre a variável independente.

Uma segunda distinção verificou-se entre as diversas constantes. A utilização do papel das constantes vem permitir aos alunos trabalhar com famílias de funções. Eles conseguem representar genericamente funções com determinadas características, que depois são particularizadas por concretização das constantes. Este processo de abordagem não é linear em todos os grupos, havendo um deles onde há dificuldades em particularizar uma função a partir da representação algébrica da sua família.

No caso concreto das funções estudadas, função afim e função quadrática, as representações algébricas apresentam características particulares que se relacionam com o papel desempenhado pelas constantes.

Na expressão ax+b, a define a inclinação de rectas ou a monotonia de funções e b representa o ponto de intersecção com o eixo dos YY

É com base na equação *y=ax+b* que os alunos definem várias funções afins. A constante *a* é concretizada consoante o tipo de gráfico que os alunos pretendem traçar. Assim, quanto maior for o *a*, mais inclinada vai ser a recta. Se o *a* for positivo a função vai ser crescente e se for negativo ela vai ser decrescente. Neste caso constante *b* assume destaque especial quando se pretende definir o ponto de intersecção com o eixo das ordenadas, sendo estabelecida uma relação directa entre esta constante e a ordenada do ponto. Quando o *a* é zero, as rectas são horizontais, e mesmo quando o *b* também se anula, continua a ser referida a recta horizontal que coincide com o eixo dos *XX*.

Na expressão algébrica ax^2+bx+c*, a define o sentido da concavidade, enquanto que c representa o ponto de intersecção com o eixo dos YY*

A equação $y=ax^2+bx+c$ é a mais utilizada quando os alunos pretendem traçar gráficos de funções quadráticas em geral. Preferencialmente eles utilizam polinómios completos, e sempre que apareceu o monómio x^2 os alunos associaram a representação com parábolas.

A constante *a* é interpretada com base no seu sinal que define o sentido da concavidade da parábola. O facto de diferentes valores de *a* representarem diferentes amplitudes da parábola não assume um papel de destaque para as interpretações que os alunos fizeram, embora eles consigam compreender essa característica e até utilizá-la em situações particulares. A constante *c* é interpretada como representando o ponto de intersecção do gráfico com o eixo das ordenadas. Quando o *b* é nulo, o *c* é ainda relacionado com o vértice da parábola, estabelecendo-se uma correspondência directa entre a constante e a ordenada do vértice. Para além desta característica a constante *b* apenas é referida por um dos grupos como influenciando a posição do eixo de simetria da parábola.

Na expressão (x+a)(x+b), o a e o b são relacionados com os zeros da função

A equação $y=(x+a)(x+b)$ é interpretada como representando uma função quadrática. Esta representação não foi formalmente abordada nas aulas, no entanto, os alunos conseguem caracterizá-la nos seus aspectos essenciais. Os alunos conseguem identificar, com base na aplicação da propriedade distributiva, o monómio em x^2 e o termo independente, conseguindo estabelecer comparações com a representação ax^2+bx+c. Esta representação é caracterizada pelo facto de ser possível estabelecer uma correspondência entre as constantes *a* e *b* e os zeros da função. Na maior parte dos casos os alunos atribuem ao *a* e ao *b* os valores simétricos dos das abcissas dos zeros, no entanto, este procedimento não é linear, acabando por vezes por ser atribuídos os próprios valores das abcissas.

A expressão $a(x-h)^2+k$ não é utilizada pelos alunos, recorrendo sempre a representações alternativas

A equação $y=a(x-h)^2+k$ é a menos utilizada pelos alunos. Apenas num dos grupos há uma referência a esta representação, mas acaba por ser abandonada após a tentativa de estabelecer um paralelo entre as suas constantes e as constantes *a*, *b* e *c* da expressão ax^2+bx+c. O facto de ela não ser utilizada pelos alunos parece estar relacionado com a abordagem que foi feita ao longo das aulas, onde os alunos tiveram que transformar, por processos algébricos, uma representação qualquer nesta representação. O processo consistia em converter a representação dada num caso notável, ao que os alunos mostraram alguma resistência e falta de compreensão. O ensino deste tipo de estratégias baseadas em processos algébricos puros, parece não motivar os alunos. Eles acabam por evitar estas representações, mesmo em situações onde a sua aplicação, por concretização das constantes *h* e *k*, era uma forma simples de resolver determinados problemas. Este tipo de representação acaba por ser substituído por outras que apresentam um grau de dificuldade semelhante, mas que possuem algumas características que podem ser relacionadas com aspectos gráficos. Parece assim ser importante que a abordagem de representações deste tipo sejam acompanhadas de processos gráficos que permitam construir representações visuais necessárias à sua compreensão.

Os pontos situados sobre os eixos são referidos apenas através da coordenada que não se anula

Esta característica, foi sempre utilizada pelos alunos quando se referiam aos zeros da funções ou aos pontos onde os gráficos intersectavam o eixo das ordenadas. Esta abordagem parece não lhes causar dificuldades, conseguindo, normalmente, interpretar com sucesso, as situações onde ela é feita. Este processo parece ser semelhante àquele que os especialistas utilizam. Assim, quando os alunos interpretam os pontos onde os gráficos intersectam o eixo dos *XX*, referem apenas as abcissas desses pontos, e quando explicítam o ponto de intersecção com o eixo dos *YY* é referida a sua ordenada.

Esta abordagem assume contornos mais amplos quando se trata de estudar o sinal ou resolver equações e inequações. Aqui verifica-se que nós assumimos claramente uma posição de interpretação, apenas sobre um dos eixos, de uma entidade, que por estar no plano, é descrita com base em ambos os eixos. A linguagem de intervalos acaba por definir uma correspondência entre entidades de dimensão um, conjunto solução, e entidades de duas dimensões, gráfico, representado no plano. É, no entanto, de destacar o facto de os alunos estarem a iniciar o estudo mais formal das funções e já conseguirem fazer esta interpretação sem grandes dificuldades.

As representações gráficas são uma forma de apresentar uma grande quantidade de informação funcional

Ao longo do estudo a representação gráfica foi sempre utilizada como sendo a principal fonte de dados. Embora esta representação seja dotada de características especiais, onde o gráfico tem que ser referido em termos de pontos que se projectam sobre dois eixos, desempenhando cada um deles um papel bem definido, os alunos conseguem movimentar-se com base nestes códigos e daí extrair um grnade número de informações. Assim, com base na representação gráfica, eles conseguem identificar o domínio e contradomínio, estudar o sinal da função e a sua monotonia, determinar os zeros da função e o ponto onde ela intersecta o eixo dos *YY*, resolver equações e inequações, bem como identificar características particulares dos gráficos. Esta não é a única forma de obter esta informação, pois os alunos poderiam recorrer à representação algébrica ou tabular, no entanto, é aquela que eles utilizam preferencialmente.

A monotonia das funções é uma característica essencialmente gráfica

A análise da monotonia das funções afins, quadráticas e módulo das anteriores é feita pelos alunos com base numa interpretação predominantemente gráfica. O crescimento ou decrescimento da função é analizado a partir da disposição das imagens e da sua projecção no eixo dos *YY*. A variação da variável independente ao longo do eixo não é referida explicitamente, mas é tida em conta pressupondo que ela varia de valores negativos para positivos. Mesmo quando os alunos referem a monotonia a partir das propriedades das constantes na representação algébrica, está subjacente o recurso a imagens mentais que eles foram elaborando a partir da observação dos vários gráficos traçados.

A operação módulo de uma função corresponde a uma transformação gráfica

A forma como os alunos referem o módulo de uma dada função, afim ou quadrática, pressupõe que é feita uma interpretação gráfica. Na maior parte das situações eles associam à operação "módulo de uma função" a tranformação geométrica em que a parte do gráfico situada para baixo dos eixo dos *XX* sofre uma simetria e passa para a parte de cima do eixo. Esta abordagem não parece basear-se apenas em representações icónicas, pois quando o gráfico da função é sempre positivo, ou sempre negativo, os alunos continuam a conseguir explicar os gráficos dos seus módulos.

As funções quadráticas são parábolas que apresentam um eixo de simetria vertical

A representação gráfica de funções quadráticas é dada por parábolas caracterizadas pelo facto de apresentarem um eixo de simetria. Este eixo é por vezes utilizado como forma de encontrar as coordenadas do ponto do vértice. Os alunos definem a abcissa com base no ponto médio entre os zeros da função e posteriormente concretizam a variável independente na expressão algébrica por forma a encontrar a ordenada do ponto.

Há situações em que os alunos admitem que o eixo da parábola pode ser horizontal, no entanto, referem que não estamos na presença de uma função. Eles conseguem ainda transformar estas parábolas, que têm o eixo de simetria horizontal, em funções considerando que têm que alterar os eixos, isto é, trocar a variável independente pela dependente.

As rectas verticais são exemplos de gráficos que não são funções

Embora os alunos não consigam representar graficamente, no computador, uma recta vertical, referem-na como exemplo de um gráfico que não define uma função. Esta abordagem parece pressupor a existência de uma representação algébrica que traduza este gráfico, no entanto, eles nunca a referem de forma explícita.

Esta representação ainda foi utilizada como forma de verificação se um dado gráfico define ou não uma função. Por vezes os alunos utilizaram a recta vertical sobrepondo-a ao gráfico dado. Se esta encontrar o gráfico em mais do que um ponto, então este não define uma função. A argumentação para este tipo de conclusão continua a ser a de que há objectos com mais do que uma imagem.

2 - Tradução entre as diferentes representações

Os alunos conseguem abordar as diferentes representações de uma forma integrada

A tradução entre as diferentes representações reflecte a capacidade dos alunos em relacionar funções idênticas com representações icónicas diferentes. Dado o tipo de ambiente onde os alunos trabalharam, a ligação entre as representações apresentava alguns aspectos tão fortes, que houve dificuldades em isolar cada uma das representações. Esta característica veio proporcionar a alguns alunos uma abordagem mista e integrada das diferentes representações, onde foram misturados aspectos algébricos e gráficos, conseguindo os alunos um bom desempenho na tradução entre estas representações.

O recurso à representação gráfica em computador, a partir da concretização das constantes na representação algébrica, foi a principal abordagem que os alunos fizeram ao longo do estudo das funções. Com base nestes procedimentos, eles começaram a referir características gráficas baseadas na influência das constantes, revelando uma compreensão gráfica do papel que estas desempenham na expressão algébrica, e relacionaram as duas representações criando imagens mentais que lhes permitiram compreender estas representações. Este tipo de abordagem permitiu aos alunos a estruturação de alguns procedimentos mais comuns, onde referem algebricamente determinadas funções em termos das suas famílias. A identificação de alguns pontos particulares, como os zeros e a intersecção com o eixo dos *YY*, também é determinante para estabelecer relações entre as diferentes representações. É, no entanto, nesta representação que sugem as principais dificuldades, ao pretender fazer a tradução da representação pontual para a algébrica.

O recurso a abordagens essencialmente gráficas também assume algum destaque em determinadas situações. Quando se pretende definir algebricamente a função módulo, de uma função afim ou quadrática, sem utilizar o símbolo de valor absoluto, os alunos fazem uma abordagem baseada na representação gráfica. Eles interpretam o gráfico, considerando os intervalos onde a função é positiva e negativa e é com base nestes que definem a representação algébrica.

De uma forma geral a expressão é estabelecida com base na anterior sem o símbolo da valor absoluto. Quando a função é positiva a expressão é mantida e quando a função é negativa é afectada do sinal menos. São raras as situações onde este tipo de abordagem foi associado com a representação de funções definidas por ramos, e quando isso aconteceu surgiram algumas dúvidas com a lógica envolvida na representação do domínio.

Na elaboração de uma representação, a partir de outra, estabelece-se normalmente uma correspondência entre as representações visuais e as propriedades algébricas das constantes que permite aos alunos interpretar ambas as representações como definindo a mesma função.

A tradução da representação algébrica para a gráfica revela os aspectos gráficos associados às constantes algébricas

Quando se pretende definir a representação gráfica a partir da representação algébrica, a principal estratégia dos alunos consiste em atribuir características gráficas às constantes da representação algébrica.

No caso da função afim, eles utilizam a expressão $ax+b$, e discutem a influência da constante a associando-a à inclinação da recta. O seu sinal também é considerado como determinante da inclinação da recta. A constante b é referida como definindo o ponto de intersecção da função com o eixo das ordenadas.

No caso da função quadrática, a expressão geral ax^2+bx+c é a mais utilizada. A constante a é discutida tendo em atenção que o seu sinal define o sentido da concavidade da parábola, e nalguns casos os alunos também relacionam o seu valor com a abertura da parábola. A constante c indica o ponto onde o gráfico corta o eixo das ordenadas. Ocasionalmente é referida como sendo a ordenada do vértice, embora, a partir da representação algébrica esta característica seja pouco significativa. A constante b raramente é referenciada, embora algumas vezes haja a tentativa de a relacionar com a posição do eixo de simetria da parábola.

A tradução da representação gráfica para a algébrica é feita com base nos pontos onde o gráfico corta os eixos coordenados

A tentativa de definir uma expressão algébrica para um gráfico dado, representado no papel, levou os alunos a estabelecer uma estratégia que consistia ema identificar os pontos onde os gráficos intersectavam os eixos coordenados.

No caso da função afim, surgem algumas dificuldades para estabelecer uma relação entre as constantes *a* e *b* da expressão *ax+b* e as coordenadas não nulas dos pontos onde o gráfico corta os eixos. Este procedimento não conduz ao gráfico pretendido, pelo que há a tendência de considerar primeiro o ponto de intersecção com o eixo dos *YY*, fazendo corresponder a ordenada do ponto ao *b* e posteriormente atribuem valores a *a* por forma a que a recta passe pelo ponto determinado no eixo dos *XX*. Nesta abordagem são utilizados processos algébricos como forma estabelecer o valor da constante *a*, ou simplesmente é considerado como a unidade.

No caso da função quadrática, os alunos também começam por identificar os pontos onde os gráficos cortam os eixos coordenados, dando especial importância aos que estão sobre o eixo dos *XX*. É com base na expressão *(x+a)(x+b)* que definem a representação algébrica, estabelecendo uma correspondência entre as abcissas dos pontos e as constantes *a* e *b*. Este procedimento é utilizado com sucesso na maior parte dos casos, desde que a parábola dada tenha a concavidade voltada para cima. Quando a concavidade está voltada para baixo, os alunos apresentam dificuldades na definição da representação algébrica, e acabam por fazer uma abordagem global que consiste em utilizar a expressão que traduz a parábola com a concavidade voltada para cima afectando-a com o sinal menos.

Em situações complexas os alunos tendem a refugiar-se em explorações algébricas

Na maior parte das situações, a influência das constantes e a sua relação com os gráficos, foi suficiente para que os alunos conseguissem fazer a tradução entre diferentes representações. Houve, no entanto, algumas situações onde tipo de estratégia não assumiu este protagonismo. Perante as dificuldades em obter as representações pretendidas, os alunos tenderam a refugiar-se em processos algébricos. Eles acabaram por utilizar dois tipos de estratégias algébricas: a resolução de equações e a concretização da variável independente. Em ambas as estratégias o objectivo era a procura de pontos de intersecção com os eixos coordenados. É de salientar que na maior parte dos casos estas abordagens foram baseadas no cálculo mental, mostrando que os alunos tinham algum domínio desta técnica.

3 - Resolução de equações e inequações

A resolução gráfica de equações e inequações é uma forma alternativa ao cálculo algébrico

O desempenho mostrado pelos alunos na resolução de equações e inequações por via gráfica parece indicar que esta abordagem representa uma forma viável e motivadora para estudar este conteúdo. Embora os processos gráficos envolvidos exijam algumas capacidades especiais, como por exemplo a de fazer uma passagem de imagens para objectos na interpretação gráfica, os alunos conseguiram lidar com estas particularidades e definir o conjunto solução com sucesso. Algumas vezes, numa primeira abordagem, eles tentam definir o conjunto solução fazendo uma leitura das imagens, mas acabam por concluir que o conjunto solução tem que ser definido em termos de objectos e não de imagens. Leinhardt, Zaslavsky e Stein (1990) apontam que os alunos têm a tendência para referir a solução de inequações utilizando apenas os pontos onde as funções se intersectam não as apresentando sobre a forma de intervalo. Neste estudo, embora inicialmente os alunos considerem os pontos onde as funções se intersectam, acabam por fazer uma interpretação correcta, considerando o intervalo no seu todo e não apenas esses pontos.

Para além da facilidade que os alunos mostraram na resolução de equações e inequações que envolviam funções afins e quadráticas, eles ainda conseguiram resolver, com sucesso, outras que por processos algébricos seriam impossíveis de solucionar.

A resolução gráfica não invalida o recurso a processos algébricos

O facto de os alunos terem resolvido as equações e inequações por processos gráficos os impediu de recorrer a processos algébricos. Em várias situações eles fizeram uma interpretação do gráfico conjugada com uma abordagem algébrica. Quando se trata de encontrar os pontos de intersecção das funções a comparar, os alunos preferem fazer a projecção destes sobre o eixo dos *XX*. Se esta projecção não for conclusiva eles acabam por recorrer a processos algébricos para determinar o ponto. No entanto, o recurso a estes processos apenas é utilizado quando as expressões envolvidas podem ser traduzidas por cálculos simples, não envolvendo polinómios de grau superior ao primeiro.

A representação gráfica das funções constantes é um precioso auxiliar para a resolução gráfica das equações e inequações

Nas situações em que os alunos se encontram perante a resolução de uma equação ou inequação, onde uma das funções é uma constante, eles utilizam como estratégia a representação gráfica dessa função. Esta abordagem foi significativa tendo em vista o abandono do recurso a alguns dos processos algébricos. Ao longo das aulas houve algumas situações onde foi adoptada outra estratégia que consistia em passar a constante para o primeiro membro e posteriomente as conclusões eram referidas em função do eixo dos *XX*, isto é, a comparação da nova função era feita com $y=0$. O facto de os gráficos se poderem intersectar para além da zona visível não é discutida com grande ênfase e os alunos limitam-se a interpretar sobretudo a parte visível no ecrã.

4 - Conclusões globais

A abordagem das funções com base nas suas múltiplas representações e com o auxílio de meios computacionais, veio proporcionar aos alunos uma forma nova de encarar o tema das funções. O conceito de função, embora seja verbalizado de uma forma proposicional, é compreendido em todas as representações. A utilização das múltiplas representações vem desenvolver nos alunos a capacidade de as interligar, conseguindo distinguir a mesma função em representações diferentes, e a facilidade em criar imagens mentais que permitem utilizar as características das funções em campos para além daqueles onde foram aprendidas. A resolução gráfica de equações e inequações surge como uma forma alternativa à resolução algébrica, onde os alunos mostram alguma facilidade na determinação do conjunto solução, e onde conseguem resolver problemas que se situam para além das suas capacidades de cálculo algébrico.

A aprendizagem das funções evolui de uma forma progressiva, que pressupõe a passagem de uma abordagem operacional para uma abordagem estrutural. A forma como os alunos utilizaram as diferentes representações pressupõe dois tipos de abordagem que podemos considerar serem fruto ensino ministrado.

Na primeira abordagem, há situações onde os alunos utilizam a representação algébrica, de uma forma operacional, recorrendo a processos de cálculo algébrico. Este tipo de abordagem é utilizado quando os alunos são confrontados com situações de representação que não foram formalmente abordadas nas aulas, como por exemplo, representar parábolas que passam por dois pontos situados sobre o eixo das abcissas.

A segunda abordagem, refere-se a situações onde os alunos utilizam a representação algébrica de uma forma mais estrutural, invocando à partida as representações com base no conhecimento da influência das constantes. Esta abordagem pressupõe essencialmente processos desenvolvidos durante as aulas, como por exemplo, considerar que a ordenada do ponto de intersecção com o eixo dos *YY* é dado pelo b da expressão $ax+b$.

Estes dois tipos de abordagem que os alunos reveleram, permitem fazer uma classificação da forma como as representações algébricas são utilizadas:

a) num nível mais baixo os alunos recorrem às representações pontuais, utilizando estratégias algébricas com base na concretização das variável independente;

b) num nível intermédio os alunos conseguem referir uma uma expressão algébrica concreta, com base no conhecimento do papel de algumas das constantes envolvidas na representação geral;

c) num nível superior os alunos conseguem utilizar famílias de funções, referidas numa forma genérica, que posteriormente concretizam para definir a representação pretendida. Este tipo de utilização também pressupõe o conhecimento do papel desempenhado pelas constantes da representação algébrica geral.

Quando surgiram situações novas, alguns alunos utilizaram métodos próprios para as resolver. Da análise das entrevistas foi possível identificar alguns desses métodos que eles desenvolveram na interacção com as representações gráficas em computador. Um destes métodos é identificado no grupo Gama. Os elementos dos grupo, aquando da interpretação dos papel das constantes na representação algébrica ax^2+bx, conseguiram caracterizar a influência da constante *b*. Eles concluíram, com base na observação de alguns gráficos traçados, que o *b* está relacionado com a deslocação do eixo de simetria da parábola. Assim, referem que, com $a>0$, quanto maior for o *b* mais para a esquerda o eixo de simetria se desloca. Se, $a<0$, o eixo desloca-se para a esquerda quanto menor for o valor de *b*. Este tipo de conclusões acaba por não ser referido noutas situações, sendo apenas destacado o papel das constantes *a* e *c* da representação geral.

O Bruno também apresenta um método próprio, quando pretende representar algebricamente uma função afim que está definida pela sua representação gráfica. Ele encontra uma representação algébrica inicial, que passa pelo ponto correcto no eixo dos *YY*, mas o mesmo não acontece na intersecção com o eixo dos *XX*. Ele utiliza então uma estratégia que consiste em fixar a recta sobre o eixo dos *YY*, mantendo o valor da constante *c*, e depois roda a recta em torno deste ponto até que passe pelo ponto pretendido no eixo dos *XX*. Este processo, embora comporte uma interpretação gráfica, é feito com base na alteração do valor da constante *a* da representação algébrica, o que pressupõe uma boa compreensão de ambas as representações.

É ainda o Bruno que recorre a um método pouco usual quando pretende definir a representação algébrica da função *y=|(x+3)(x-2)|,* representada no computador, sem utilizar o símbolo de valor absoluto. Embora a representação mais usual fosse a de uma função definida por ramos, o Bruno consegue conjugar algumas funções que não foram abordadas nas aulas e define numa única expressão algébrica a função módulo a que chama "um módulo inventado". Ele utiliza a expressão *(x+3)(x-2),* eleva-a ao quadrado, tornando-a positiva em todo o seu domínio e depois acha a raíz quadrada, conseguindo assim definir a expressão numa única representação.

No que diz respeito ao ensino, há razões para se considerar que o tipo de intervenção escolhido pela professora representa uma abordagem enriquecida dos novos programas. A utilização do computador com o apoio de fichas de trabalho vem colocar o aluno no centro do processo de ensino-aprendizagem, onde ele estabelece as suas conjecturas e tem a oportunidade de desenvolver os processos de prova desses conjecturas.

A elaboração de relatórios, sobre as actividades desenvolvidas em computador é bastante útil, pois, para além de ajudar os alunos a estruturar o seu pensamento e a criar hábitos de escrita, ajuda ainda o professor a manter um acompanhamento da aprendizagem, podendo em qualquer altura desenvolver actividades de remediação, caso verifique que existem problemas de compreensão dos conteúdos.

A discussão das conclusões apresentados nos relatórios, na interacção dos alunos com a professora, também representa uma estratégia que ajuda à construção e elaboração dos conceitos. Os alunos apresentam os seus argumentos, fundamentando-os e a professor apenas "arbitra" esta discussão.

5 - Recomendações

A partir desta investigação sugerem-se algumas recomendações para o ensino e aprendizagem das funções.

No que se refere à utilização do computador, parece ser importante que o *software* a utilizar tenha algumas características específicas. No essencial deve permitir que os utilizadores possam ter acesso a todas as representações com a possibilidade de as alterar, e a partir de cada uma delas poder gerar qualquer uma das outras. Também é importante poder utilizar vários factores de zoom, por forma a conseguir visualizar o gráfico em diferentes escalas. A par desta possibilidade deveria dispor de um dispositivo que pudesse, a cada momento, dar as coordenadas de qualquer ponto do plano definido no ecrã do computador. É de salientar que algumas das possibilidades que o programa utilizado comporta também são importantes, como por exemplo a de poder sobrepor vários gráficos, utilizar um sinal sonoro durante o traçado do gráfico cujo som está relacionado com a monotonia da função, a possibilidade de visualizar as várias representações ao mesmo tempo, a facilidade em alterar os eixos por troca das variáveis.

A abordagem das funções com base em ferramentas computacionais, vem sugerir que é possível explorar um grande número de funções, num espaço de tempo relativamente curto. Perante esta facilidade parece ser recomendável que a sua utilização na sala de aula possa ir para além das actividades previstas no currículo. Os alunos que ao longo desta investigação fizeram exploração de outros gráficos, não previstos nas actividades, acabaram por apresentar estratégias alternativas baseadas em métodos próprios. Esta abordagem carece, no entanto, de uma maior investigação para se poder tornar efectiva.

A partir da utilização do computador durante o processo de ensino, parece ser recomendável que os alunos possam dispor de mais tempo para aí trabalhar, podendo mesmo vir ser utilizado em situações extra-lectivas e em momentos de avaliação. É no entanto necessário produzir mais investigação para que se possa esclarecer algumas dúvidas acerca do seu papel na avaliação.

O desenvolvimento de relatórios das actividades em computador, para além de uma actividade bastante exigente para os alunos, revelou-se bastante positiva no processo de aprendizagem. Parece ser importante que a elaboração destes relatórios se estendam para além das actividades em computador, podendo mesmo ser um meio de avaliação da progressão na aprendizagem quando realizados ao longo das várias aulas.

O recurso a este tipo de ensino também parece ser recomendável, uma vez que os alunos, ao serem colocados no centro do processo de ensino-aprendizagem, são agentes da sua própria aprendizagem que passa a ser determinada por um processo de construção dos conhecimentos baseado em permissas elaboradas pelo próprio aluno. A qualidade da aprendizagem foi substancialmente melhorada pelo recurso a interpretações qualitativas dos gráficos com forte interligação entre as diferentes representações. Este estudo mostra que uma abordagem pedagógica com estas características é possível no nosso país. O computador e a calculadora gráfica revelaram serem auxiliares preciosos para esta metodologia, e o desenvolvimento natural de novas ferramentas computacionais tenderão a potenciar ainda mais estas virtualidades.

AGRADECIMENTOS

Para a realização desta investigação contribuíram pessoas e instituições às quais agradeço, em especial:

À professora e aos alunos que participaram neste estudo, pela disponibilidade, colaboração e empenhamento dispensados.

Ao José Manuel Matos pelas suas sugestões, críticas e ensinamentos, pelas palavras de estímulo e encorajamento com que sempre me incentivou e pela sua incansável disponibilidade.

Ao Departamento de Matemática, e a todos os colegas da disciplina de Análise Matemática pela disponibilidade dispensada.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Artigue, M. (1992). Functions from an algebraic and graphic point of view: Cognitive difficulties and teaching practices. Em G. Harel & E. Dubinsky (Eds.), *The concept of function* (pp. 109-132). Washington, EUA: Mathematical Association of America.

Artigue, M. & Dagher, A. (1993). The use of computers in learning to correlate algebraic and graphic representations of functions. Em B. Jaworski (Ed.), *Proceedings of the International Conference on Technology in Mathematics Teaching (TMT93)* (pp. 109-116). Birmingham, Reino Unido: University of Birmingham.

Bogdan, R. & Biklen, S. (1982). *Qualitative research for education: An introduction to theory and methods.* Boston: Allyn and Bacon.

Borba, M. (1993). *Students' understanding of transformations of functions using multi-representational software.* Tese de doutoramento apresentada na Cornell University.

Brito, M. L. & Neves, M. A. (1993). Matemática 10º Ano - Livro de Texto - 2º Vol. Porto: Porto Editora.

Clement, J. (1985). Misconceptions in graphing. Em L. Streefland (Ed.), *Proceedings of the Ninth International Conference for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 1* (pp. 369-375). Utrecht, Países Baixos: State University of Utrecht.

Clement, J. (1989). The concept of variation and misconceptions in Cartesian graphing. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 11* (2), 77- 87.

Confrey, J. & Smith, E. (1992). Revised accounts of the function concept using multi-representacional software, contextual problems and student paths. Em W. Geeslin & K. Graham (Eds.), *Proceedings of the Sixteenth PME*

Conference, Vol. 1 (pp. 153-160). Durham, EUA: University of New Hampshire.

Costa, A. (1986). A pesquisa de terreno em sociologia. Em A. Silva & J. Pinto (Eds.), *Metodologia das Ciências Sociais* (pp. 129-148). Lisboa: Edições Afrontamento.

Cunningham, S. (1991). The visualization environment for mathematics education. Em S. Cunningham & W. Zimmermann (Eds.), *Visualization in teaching and learning mathematics* (pp. 67-76). Washington, EUA: Mathematical Association of America.

Cunningham, S. & Zimmermann, W. (1991). Editors' introduction: What is mathematical visualization? Em S. Cunningham & W. Zimmermann (Eds.), *Visualization in teaching and learning mathematics* (pp. 1-8). Washington, EUA: Mathematical Association of America.

Cuoco, A. (sem data). *Multiple representatoins for functions*. Manuscrito não publicado.

De Corte, E. (1992). Aprender na escola com as novas tecnologias da informação. Em V. Teodoro & J. Freitas (Eds.), *Educação e computadores* (pp. 89-117). Lisboa: GEP.

Demana, F., & Waits, B. (1990). The role of technology in teaching mathematics. *Mathematics Teacher, 83* (1) 27-31.

Dreyfus, T. (1994). Advanced mathematical thinking processes. Em D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 25-41). Dordrecht: Kluwer.

Dreyfus, T. & Eisenberg, T. (1991). On the reluctance to visualize in mathematics. Em S. Cunningham & W. Zimmermann (Eds.), *Visualization in teaching and learning mathematics* (pp. 25-37). Washington, EUA: Mathematical Association of America.

Drijvers, P. (1993). The classification of the graphs using a graphics calculator. Em B. Jaworski (Ed.), *Proceedings of the International Conference on Technology in Mathematics Teaching (TMT93)* (pp. 213-220). Birmingham, Reino Unido: University of Birmingham.

Duarte, F. (1989). *O computador e o programa "ESTDFUNC" no estudo das funções*. Tese de mestrado. Lisboa: Projecto MINERVA - Pólo do DEFCUL - U. Lisboa.

Eisenberg, T. (1992). On the development of a sense for functions. Em G. Harel & E. Dubinsky (Eds.), *The concept of function* (pp. 153-174). Washington, EUA: Mathematical Association of America.

Eisenberg, T. (1994). Functions and associated learning difficulties. Em D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 140-152). Dordrecht: Kluwer.

Even, R. (1990). Subject matter knowledge for teaching and the case of functions. *Educational Studies in Mathematics, 21,* 521-544.

Even, R. (1993). Subject-matter knowledge and pedagogical content knowledge: Prospective secondary teachers and the function concept. *Journal for Research in Mathematics Education, 24,* 94-116.

Ferreira, J. (1990). *Introdução à Análise Matemática.* Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.

Fey, J. (1991). Tecnologia e Educação Matemática - Uma revisão de desenvolvimentos recentes e problemas importantes. Em J. P. Ponte (Ed.), *Cadernos de Educação e Matemática (2)* (pp.45-79). Lisboa: APM.

Freudental, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures.* Dordrecht: Kluwer.

Ghiglione, R., & Matalon, B. (1970). *Les enquêtes sociologiques, théories et pratices.* Paris: Armand Colin.

Goldenberg, E. (1988). *Mathematical, technical, and pedagogical challenges in the graphical representation of functions.* Massachusetts: Harvard Graduate School of Education.

Goldenberg, E. (1991). The difference between graphing software and educational graphing software. Em S. Cunningham & W. Zimmermann (Eds.), *Visualization in teaching and learning mathematics* (pp. 77-86). Washington, EUA: Mathematical Association of America.

Guttenberger, E. W. (1992). The learning of trigonometric functions in a graphical computer environment. Em W. Geeslin. & K. Graham (Eds.), *Proceedings of the Sixteenth PME Conference, Vol. 3* (pp. 106-113). Durham, EUA: University of New Hampshire.

Janvier, C. (1978). *The interpretation of complex cartesian graphs representing situations - Studies and teaching experiments.* Tese de doutoramento apresentada na Université du Québec a Montréal.

Janvier, C. (1983). Representation and understanding: The notion of function as an example. Em R. Hershkowitz (Ed.), *Proceedings of the Seventh International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 266-270). Rehovot, Israel: Weizmann Institute of Science.

Janvier, C., Girardon, C. & Morand, J. (1993). Mathematical symbols and representations. Em P. Wilson (Ed.), *Research ideas for the classroom: High school mathematics* (pp. 79-102). Nova Iorque: Macmillan.

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. Em D. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 390-419). Nova Iorque: Macmillan.

Kreimer, A. & Taizi, N. (1983). Graphic & algebraic presentation of functions - Can the student relate from one to the other? Em R. Hershkowitz (Ed.), *Proceedings of the Seventh International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 284-288). Rehovot, Israel: Weizmann Institute of Science.

Lauten, D. & Mundy, J. (1993). Teaching and leraning calculus. Em P. Wilson (Ed.), *Research ideas for the classroom: High school mathematics* (pp. 155-176). Nova Iorque: Macmillan.

Leinhardt, G., Zaslavsky, O. & Stein, M. (1990). Functions, graphs, and graphing: Tasks, learning, and teaching. *Review of Reseach in Education, 16*, 1-64.

Markovits, Z., Eylon, B-S., & Bruckheimer, M. (1986). Functions today and yesterday. *For the Learning of Mathematics, 6*(2), 18-24, 28.

Ministério da Educação e Cultura, (1991). *Programas de Matemática — 2º e 3º Ciclos do Ensino Básico e Ensino Secundário português, para aplicação em regime de experiência pedagógica*. Ministério da Educação e Cultura.

Monk, S. (1992). Students' understanding of a function given by a physical model. Em G. Harel & E. Dubinsky (Eds.), *The concept of function* (pp. 175-193). Washington, EUA: Mathematical Association of America.

National Council of Teachers of Matematics (1991). *Normas para o currículo e a avaliação em matemática escolar*. Lisboa: APM & IIE.

Patton, M. (1986). *Qualitative evaluation methods*. Londres: Sage Publications.

Ponte, J. (1984). *Funcional reasoning and the interpretation of cartesian graphics*. Tese de doutoramento apresentada na University of Georgia.

Ponte, J. (1985). Concepções e dificuldades dos alunos em raciocínio funcional. *PROFMAT-Revista Teórica e de Investigação sobre o Ensino da Matemática, 1*, 234-248.

Ponte, J. (1990). O conceito de função no currículo de Matemática. *Educação e Matemática, 15*, 3-9.

Schwartz, J. & Yerushalmy, M. (1992). Getting students to function in and with algebra. Em G. Harel & E. Dubinsky (Eds.), *The concept of function* (pp. 261-289). Washington, EUA: Mathematical Association of America.

Selden, A. & Selden, J. (1992). Research perspectives on conceptions of function: Summary and overview. Em G. Harel & E. Dubinsky (Eds.), *The concept of function* (pp. 1-21). Washington, EUA: Mathematical Association of America.

Sfard, A. (1989). Transition from operacional to structural conception: The notion of function revisited. *Actes de la Troisième Conference Internationale Psychology of Mathematics Education, Vol. 3* (pp. 151-158). Paris: França.

Sfard, A. (1992). Operacional origins of mathematical objects and the quandary of reification - The case of function. Em G. Harel & E. Dubinsky (Eds.), *The concept of function* (pp. 59-84). Washington, EUA: Mathematical Association of America.

Sierpinska, A. (1992). On understanding the notion of function. Em G. Harel & E. Dubinsky (Eds.), *The concept of function* (pp. 25-58). Washington, EUA: Mathematical Association of America.

Tierney, C., Weinberg, A, & Nemirovsky, R. (1992). Telling stories about plant growth: Fourth grade students interpret graphs. Em W. Geeslin. & K. Graham (Eds.), *Proceedings of the Sixteenth Psychology of Mathematics Education Conference, Vol. 3* (pp. 66-73). Durham, EUA: University of New Hampshire.

Vinner, S. (1983). Concept definition, concept image and the notion od function. *International Journal of Mathematics Education, Science and Technology, 14*, 293-305.

Vinner, S. (1989). The avoidance of visual considerations in calculus students. Em T. Eisenberg & T. Dreyfus (Eds.), *Focus on Learning Problems in Mathematics, 11 (2)*, 149-156.

Vinner, S. (1992). The function concept as a prototype for problems in mathematics learning. Em G. Harel & E. Dubinsky (Eds.), *The concept of function* (pp. 195-213). Washington, EUA: Mathematical Association of America.

Vinner, S. & Dreyfus, T. (1989). Images and definitions for the concept of function. *Journal for Research in Mathematics Education, 20*, 356-366.

Vinner, S, & Tall, D. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics, 12*, 151-169.

Weigand, H. (1993). Iterations and computer representations. Em B. Jaworski (Ed.), *Proceedings of the International Conference on Technology in Mathematics Teaching (TMT93)* (pp. 483-490). Birmingham, Reino Unido: University of Birmingham.

Zehavi, N. (1986). Interaction between graphical and algebraic representations in the use of microcomputer software. Em *Proceedings of the Tenth International Conference of Psychology Mathematics Education, Vol. 1* (pp. 217-222). Londres: University of London, Institute of Education.

Referências de Software

Teodoro, V. (1989). *Funções* [Programa de computador]. Monte da Caparica: Projecto MINERVA: FCT\UNL.

ANEXOS

ANEXO 1

Fichas de Trabalho

(Funções 4 e Funções 6)

Assunto : Função Afim

Material Necessário : Computador e o programa " Funções " e/ou Calculadora gráfica .

Chama-se **Função Afim** a uma função representável por um polinómio do tipo <u>$ax + b$</u> .

«««««««»»»»»»»

Actividade 1 : Traçá o gráfico das seguintes funções afins :

$y_1 = 3x + 5$ (a = ... b = ...)

$y_2 = -2x + 4$ (a = ... b = ...)

$y_3 = 4x$ (a = ... b = ...)

$y_4 = -x$ (a = ... b = ...)

$y_5 = -3$ (a = ... b = ...)

O Gráfico obtido é sempre uma _________________ .

Actividade 2 : **Apaga os gráficos anteriores e traça os gráficos de funções afins do tipo :**

$$f(x) = ax \quad , \quad a \in \Re \qquad (b = 0)$$

O que é que estas rectas têm em comum ?

Actividade 3 : **Apaga os gráficos anteriores e traça agora os gráficos de funções afins do tipo :**

$$f(x) = ax + 3 \quad , \quad a \in \Re \quad (b = 3)$$

O que é que estas rectas têm em comum ?

Actividade 4 : **Para finalizar traça os gráficos de funções afins do tipo :**

$$f(x) = 3x + b \quad , \quad b \in \Re \quad (a = 3)$$

O que é que estas rectas têm em comum ?

Uma Função Afim é uma função cujo gráfico é uma recta .

Uma função cujo gráfico é uma recta que passa pela origem é uma Função Linear .

Uma função cujo gráfico é uma recta paralela ao eixo das abcissas é uma função constante .

FIM

- *Assunto* : Função Quadrática

Material Necessário : Computador e o programa " Funções " e/ou Calculadora gráfica .

Já foram resolvidos alguns problemas envolvendo expressões do 2° grau. Utilizando o computador e/ou a calculadora gráfica verificou-se que o gráfico de expressões do 2° grau são parábolas.

Estudo da função quadrática

Chama-se *Função Quadrática* a uma função representável por um polinómio do tipo $ax^2 + bx + c$, $(a \neq 0)$.

Porquê $a \neq 0$?

«««««o»»»»»«««««o»»»»»«««««o»»»»»«««««o»»»»»«««««o»»»»»«««««o»»»»»

Actividade 1 : Traça o gráfico de cada uma das seguintes funções : $y = x^2$, $y = 2x^2$, $y = \frac{1}{4}x^2$ e $y = -x^2$, $y = -3x^2$, $y = -\frac{1}{2}x^2$

- Todas são funções do tipo $f(x) = \ldots.x^2$.
- Para cada uma das funções, indica os valores de a , b , c .
- Os gráficos obtidos são .... que têm a concavidade voltada para cima se .... e a concavidade voltada para baixo se ....
- Indica o domínio e o contradomínio de cada uma das funções, assim como zeros , intervalos em que são positivas, negativas, crescentes e decrescentes .
- Como conclusão faz um estudo comparativo dos seis gráficos .

Actividade 2 : Traça o gráfico das funções : $y = x^2 + 3$ e $y = x^2 - 4$.

- Compara os gráficos obtidos com o gráfico de $y = x^2$.

Traça o gráfico das funções : $y = 2x^2 + 3$ e $y = 2x^2 - 4$.

- Compara os gráficos obtidos com o gráfico de $y = 2x^2$.

Traça o gráfico das funções : $y = -3x^2 + 2$ e $y = -3x^2 - 3$.

- Compara os gráficos obtidos com o gráfico de $y = -3x^2$.

Utiliza a folha do relatório para o estudo de funções e tenta responder ás questões da actividade 1 .

Actividade 3 : Traça o gráfico das funções : $y = x^2 + 2x$; $y = -3x^2 + 3x$; $y = 2x^2 - 5x$; $y = -x^2 - 4x$

Relativamente aos gráficos anteriores que semelhanças e diferenças encontras ?
Tenta responder ás mesmas questões .

ANEXO 2

Guião das Entrevistas

GUIÃO DE ENTREVISTA
1ª entrevista

Estudo da função afim

- Que tipo de gráficos obtemos a partir da função definida por ***y = ax+b***?

- Quantas funções estão definidas por esta representação analítica?

- Que nome podemos dar a esta representação?

- Considera as três representações seguintes: ***y = ax+b***, ***y = gx+d***, ***y = a+hx***.
  — Que diferenças há entre as três representações?

- Considera agora ***y = ax+b*** com ***b=0***.
  Traça, no computador, alguns gráficos e tenta responder às seguintes questões:
  — Qual a importância do coeficiente a?
  — Se a=0, será que é função?
  — O que é que aquelas funções têm de comum?
  — Como é que podemos descrever a sua variação (crescimento e decrescimento)?

- Tenta representar três rectas que passem pelo ponto de coordenadas **(0,-2)**

- A que família pertencem estas funções?

- Quantas rectas podes representar a passar pelo mesmo ponto?

- Consegues representar uma recta vertical? E horizontal?

- Representa agora quatro rectas que passem pelo ponto de coordenadas **(0,3).**

- Consegues representar gráficos de funções que passem pelo ponto de coordenadas **(2, 0)**? O que é que eles têm em comum?

✎ Consegues representar gráficos de funções que passem pelo ponto de coordenadas **(-3, 0)**?

✎ Consegues representar gráficos de funções afins que sejam rectas paralelas?

— A que família pertencem estas funções?

✎ Considera as seguintes funções: $f(x) = 2x+4$ $g(x) = x-3$, $h(x)= x+1$

— Quando é que f(x) é maior que 2?

— Quando é que g(x) é menor que -1?

— Quando é que f(x) é maior que h(x)?

GUIÃO DE ENTREVISTA
2ª entrevista

Estudo da função afim

- Que tipo de gráficos obtemos a partir da função definida por ***y = ax+b***?

- Quantas funções estão definidas por esta representação analítica?

- Considera as três representações seguintes: ***y = ax+b***, ***y = gx+d***, ***y = a+hx***.
  — Que diferenças há entre as três representações?

- Tenta representar duas rectas que passem pelo ponto de coordenadas **(0,-2)**

- A que família pertencem estas funções?

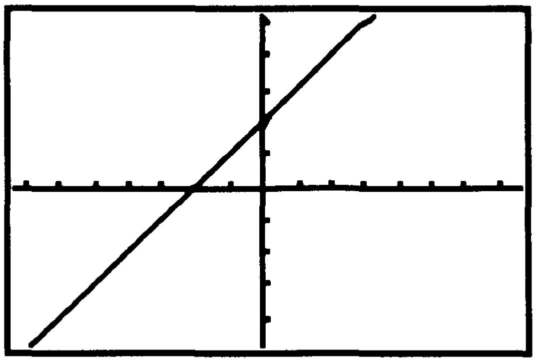
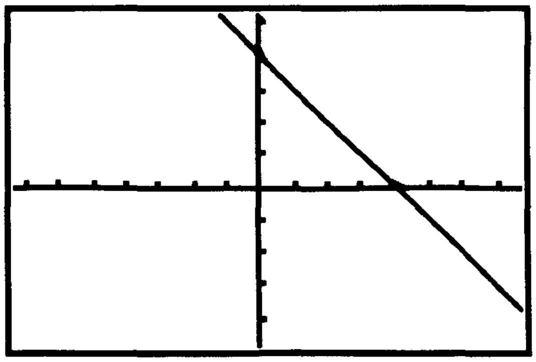
- Quantas rectas podes representar a passar pelo mesmo ponto?

- Consegues representar uma recta vertical? E horizontal?

- Consegues representar gráficos de funções que passem pelo ponto de coordenadas **(2, 0)**?
  — O que é que eles têm em comum?

- Consegues representar gráficos de funções afins que sejam rectas paralelas?
  — A que família pertencem estas funções?

- Considera as seguintes funções:***f(x) = 2x+4***, ***g(x) = x-3***, ***h(x)= x+1***.
  — Quando é que f(x) é maior que 2?
  — Quando é que g(x) é menor que -1?
  — Quando é que f(x) é maior que h(x)
- Para os gráficos abaixo indica uma expressão algébrica.

Função quadrática e função módulo

- Traça os gráficos de duas parábolas, uma com a concavidade virada para cima e outra com a concavidade virada para baixo.

- Indica os pontos onde as duas funções são iguais.

- Indica os pontos onde a 1ª é menor do que a segunda.

- Quais são os zeros da função $y= (x-2)(x+3)$

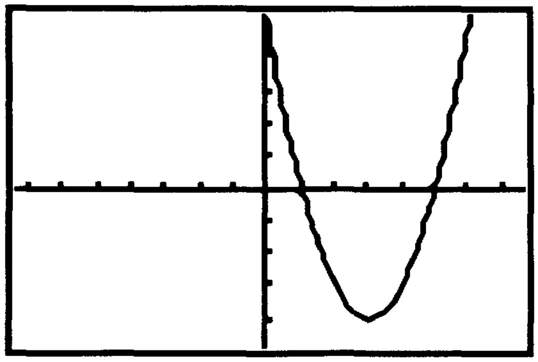
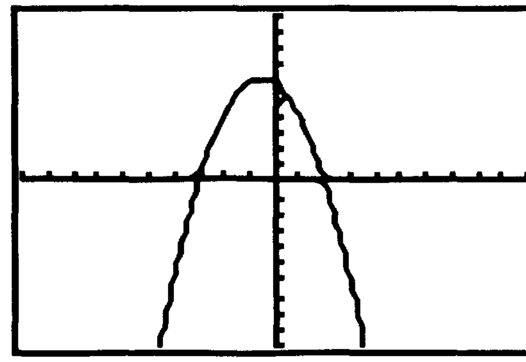
- Representa no computador uma parábola por forma que o contradomínio seja $\Re_0^+$

- Representa uma parábola que tenha o vértice no ponto **(0,-3)**.

- Representa parábolas que passem pelos pontos: **(0,-3)** e **(0,2)**.

- Representa o módulo de uma das funções anteriores e diz como se poderia representar algebricamente sem usar o símbolo de módulo.
- Representa graficamente $y = (-x^2-x+6)^{1/2}$
  — Explica o que aconteceu com a representação gráfica

- Para os gráficos abaixo indica uma possível expressão algébrica

Traça os gráficos de duas funções f e g, uma quadrática e uma afim por forma que os dois gráficos se intersectem.

Resolve as inequações f > g e f≤ g.
— Qual a solução de f = g?

O que é para ti uma função?

A corresponência entre y e x tem que ser unívoca?

Qual a tua opinião sobre o trabalho realizado ao longo das aulas?

Já tinham trabalhado antes com o computador nas aulas?

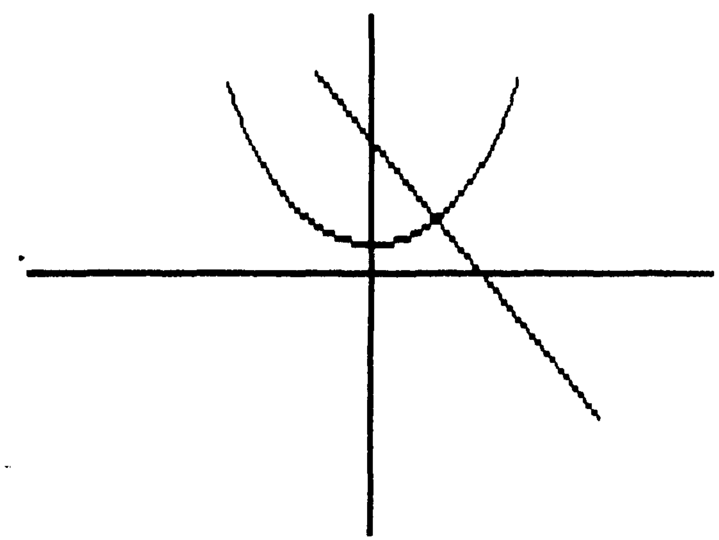
Qual a ferramenta que mais gostaram de utilizar: o computador ou a calculadora gráfica? Porquê?

ANEXO 3

Apresentação do Programa "FUNÇÕES"

Funções

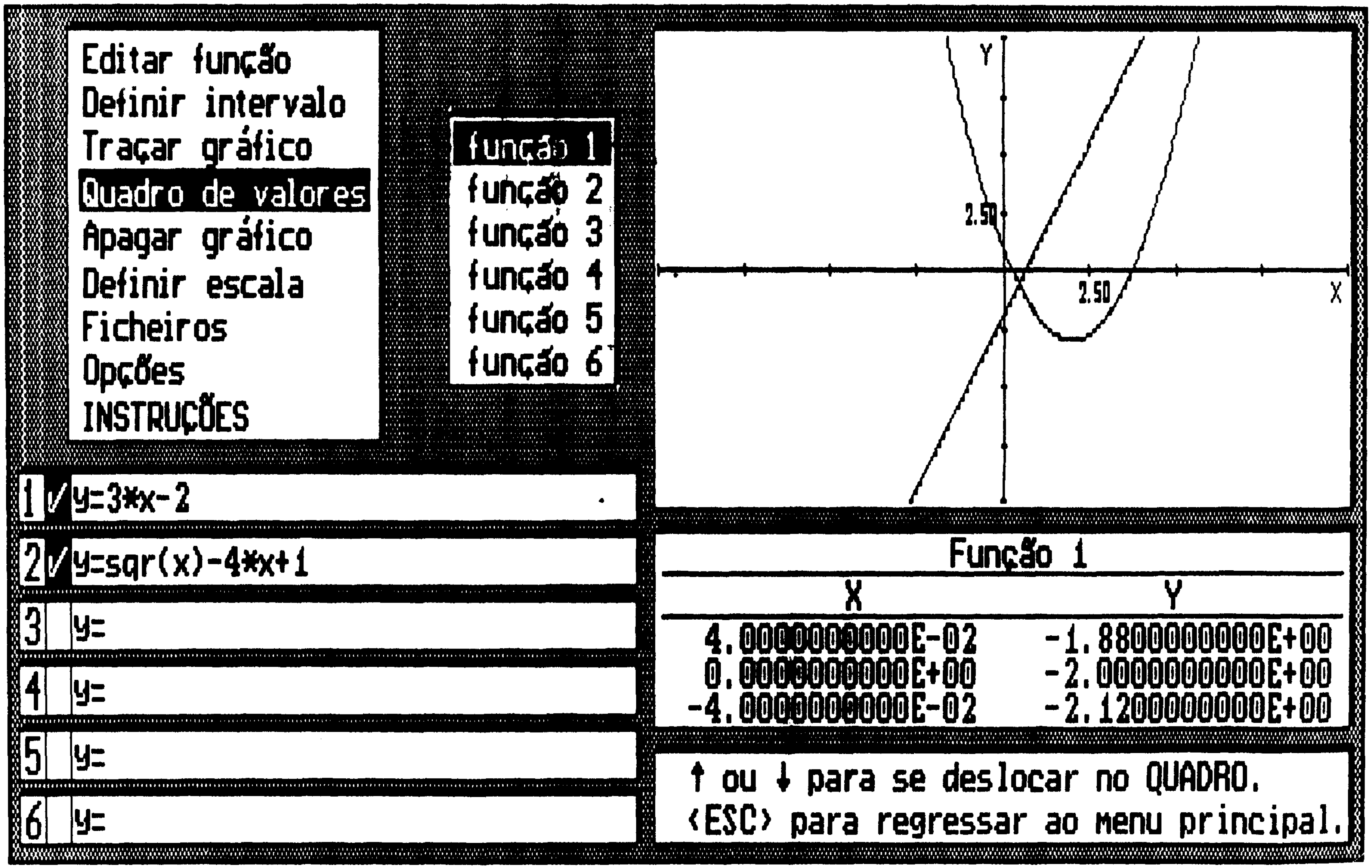
Um programa para investigar
a representação gráfica de funções



Autor: Vitor Duarte Teodoro
Programador: João Carlos Batalha
Versão 1.0 (Setembro 1989)

Projecto MINERVA, Faculdade de Ciências e Tecnologia (UNL)

Qualquer tecla para continuar


Editar função
Definir intervalo
Traçar gráfico
Quadro de valores
Apagar gráfico
Definir escala
Ficheiros
Opções
INSTRUÇÕES
função 1
função 2
função 3
função 4
função 5
função 6
Y
2.50
2.50
X
1 √ y=3*x-2
2 √ y=sqr(x)-4*x+1
3 y=
4 y=
5 y=
6 y=
Função 1
X Y
4.0000000000E-02 -1.8800000000E+00
0.0000000000E+00 -2.0000000000E+00
-4.0000000000E-02 -2.1200000000E+00
↑ ou ↓ para se deslocar no QUADRO.
<ESC> para regressar ao menu principal.